

Math. P

637hl

Math. P.
637 hl

Wiegand

217

Erster Cursus

der

Planimetrie.

Für

Gymnasien, Real- und Bürgerschulen

und zum Gebrauche für Hauslehrer

bearbeitet

von

Dr. August Wiegand.

Siebente, theilweise umgearbeitete Auflage.

Mit hundertundsieben Holzschnitten.

Halle,

Druck und Verlag von H. W. Schmidt.

1863.

Im Verlage von H. W. Schmidt in Halle sind ferner erschienen und durch alle Buchhandlungen zu beziehen:

Berkhan, W., Lehrbuch d. **unbestimmten Analytik**. Die Auflösung der Diophantischen Gleichungen ersten und zweiten Grades für höhere Lehranstalten. 2 Bde. 1855—1856. 2 Thlr. 20 Sgr.

Es fehlte bisher den meisten Gymnasien und Realschulen nicht nur an einem Lehrbuche der unbest. Analytik, sondern auch an einem reichhaltigen Material von Uebungsaufgaben. Beide Zwecke erfüllt dieses Lehrbuch in angemessener Weise. Dasselbe enthält auch viele neue, für die Zahlentheorie wichtige Sätze.

— — — **Das Problem des Pappus** von den Berührungen durch die geometrischen Oerter aufgelöst und erweitert, nebst einer Reihe von Lehrsätzen und Aufgaben über Berührungen, zur Beförderung des geometrischen Studiums in den mittleren und oberen Klassen d. Gymnasien, Real- u. Gewerbeschulen. M.Kpfrtfl. 1857. 15 Sgr.

Es wird den Anfängern der Geometrie besonders lieb sein, den Begriff der geometrischen Oerter in Anwendung zu bringen. Sowohl die Erweiterungen des Problems, als auch die beigegebenen Lehrsätze bieten anziehenden Stoff zu weiteren Uebungen.

— — — **Die Anwendung der Algebra auf Geometrie**. Eine Anleitung zum Auflösen geometrischer Aufgaben mittelst der algebraischen Analysis. Mit 8 Kpfr. 1858. 24 Sgr.

Diese mit Fleiss und Sorgfalt geschriebene Anleitung giebt zunächst die geometrischen Constructionen algebraischer Ausdrücke ersten und zweiten Grades und lässt dann in ziemlicher Menge eine Reihe gut gewählter Aufgaben folgen, um daran das Wesen der algebraischen Analysis auf eine leicht fassliche Weise zu erläutern.

— — — **Die Anwendung der Algebra auf praktische Arithmetik**, enthält die Rechnungen d. Geschäftslebens m. viel. Beispielen u. beigegeführter algebr. Begründung sämmtl. Rechnungsregeln. 1859. 1 $\frac{1}{3}$ Thlr.

Das vorliegende Buch umfasst die Proportionsrechnungen, Kettenregel, Gesellschafts-, Vermischungs-, Vereinigungs-, Discout-, Termin- und Zinsrechnung von den Jahrrenten, ferner die kaufmännischen Rechnungsarten, Agio-, Gewinn- und Verlust-, Silber-, Gold-, Tara-Rechnung, Wechsel, Waarencalculation, Barotto-Rechnung, Kunstgriffe im prakt. Rechnen.

— — — **Die Anwendung der Geometrie auf Arithmetik und Algebra**, enthaltend die wichtigsten Lehrsätze der Arithmetik und Algebra durch geometrische Constructionen dargestellt. Mit 9 Kpfrt. 1861. 24 Sgr.

Es muss besonders Lehrern und Schülern angenehm sein, in dieser Schrift zum ersten Male die Lehrsätze der Arithmetik und Algebra durch geometrische Betrachtungsweisen im Zusammenhange begründet zu finden.

M. E. Bary's neue physikalische Probleme. Für die oberen Classen höherer Lehranstalten, Gymnasien, Realschulen, sowie für Studirende und Lehrer der Mathematik und Physik. Von Dr. F. A. Korschel. Mit 3 Kupfertafeln. 1857. 1 Thlr. 6 Sgr.

Herr Direktor Dr. Wiegand sagt über vorliegendes Werk:

Die Nouveaux Problèmes de Physique etc. par M. E. Bary gehören unstreitig zu dem Ausgezeichnetsten, was die französische Literatur in diesem Genre geliefert hat, dabei geben sie ein ausserordentlich günstiges Zeugniß über die Leistungen in der Physik auf den französischen Lyceen. Wenn trotzdem dieses vortreffliche Werk, das bereits in mehreren Auflagen erschienen ist, bis jetzt noch keinen deutschen Uebersetzer gefunden hatte, so können wir uns dies nicht anders erklären, als dass einmal die dem Uebersetzer hier entgegentretenden, besonderen Schwierigkeiten davon abschreckten, dann aber, dass der in dem Werke eingenommene Standpunkt vielleicht Manchem als ein für die deutschen Schulanstalten zu hoch gegriffener erscheinen mochte. Was den ersteren Punkt anlangt, so

Lehrbuch

der

Mathematik

Für den Schul- und Privatunterricht

bearbeitet

von

Dr. August Wiegand

Lehrer an der Planimetrie

Neunter, überarbeiteter und vermehrter Ausgabe

Verlag

Druck und Verlag von H. W. Schmidt

1868

Lehrbuch
der
M a t h e m a t i k.

Für den Schul- und Privatunterricht

bearbeitet

von

Dr. August Wiegand.

Erster Cursus der Planimetrie.

Siebente, theilweise umgearbeitete Auflage.

Halle,

Druck und Verlag von H. W. Schmidt.

1863.

Erster Cursus
der
Planimetrie.

Vorrede zur siebenten Auflage.

Für

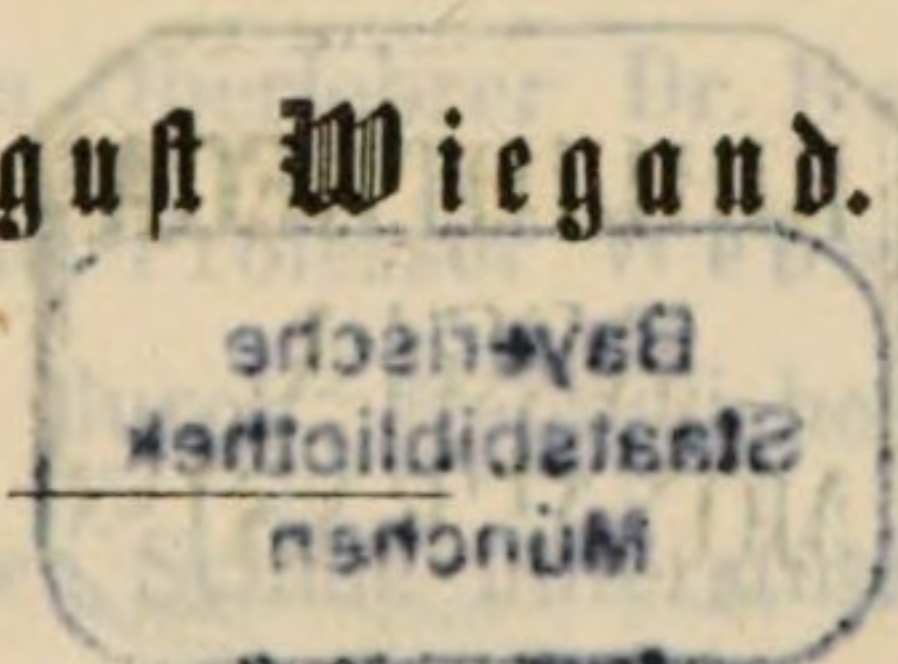
Gymnasien, Real- und Bürgerschulen

und zum Gebrauche für Hauslehrer

bearbeitet

von

Dr. August Wiegand.



Siebente, theilweise umgearbeitete Auflage.

Mit hundertundsieben Holzschnitten.

Halle,

Druck und Verlag von H. W. Schmidt.

1863.

Erster Theil

der

Planimetrie.

Für

Gymnasien, Real- und Bürgerschulen

und zum Gebrauche für Hauslehrer

bearbeitet

von



Stebens, theilweise ungenutzte Auflage

Mit handverlesenen Holzschnitten

Malle

Druck und Verlag von H. W. Schmidt

1863

worden. Diese Erweiterung dürfte vielen um so willkommen sein, als trotz derselben eine Preiserhöhung der Schrift nicht eingetreten ist.

Die übrigen Cursus des Lehrbuchs der Mathematik sind:

1) Zweiter Cursus der Planimetrie, 5. Aufl. 1880.

2) Ebene Trigonometrie, 4. Aufl. 1880.

3) Sphärische und sphärische Trigonometrie, 4. Aufl. 1882.

4) Analytische Geometrie, 4. Aufl. 1882.

5) Allgemeine Arithmetik, 4. Aufl. 1883.

6) Algebraische Analysis und Anfangsgründe der Differential-

rechnung, 2. Aufl. 1883.

Das vorliegende Lehrbuch hat diesmal in etwas umfangreicherer Weise Aenderungen erfahren, als dies bisher bei den einzelnen Auflagen geschehen war. Das Fortschreiten der Wissenschaft und die berechtigten Wünsche geehrter Herren Collegen, die das Buch seit langen Jahren in der Schule benutzt haben, durften nicht länger unberücksichtigt bleiben. Bei der neuen Bearbeitung der Schrift haben mich insbesondere zwei liebe Freunde, die Herren Oberlehrer Dr. Bette an der Realschule in Halberstadt und Professor Weber an der hiesigen lateinischen Hauptschule durch freundliche Mittheilung ihrer reichen Erfahrungen in der Schule unterstützt und verfehle ich nicht, denselben auch hier meinen aufrichtigsten Dank zu sagen.

Da von dem Lehrbuche in zwanzig Jahren sechs Auflagen, wovon die fünf letzten Doppel-Auflagen waren, verbreitet wurden, so darf es wohl als so weit bekannt betrachtet werden, dass die Vorreden zu den früheren Auflagen weggelassen werden konnten.

Es liegt in des Verfassers Absicht, der demnächst zu erwartenden sechsten Auflage des zweiten Cursus der Planimetrie auch eine Darstellung der wichtigsten Lehren der neueren Geometrie einzuverleiben und ist deshalb der erste Abschnitt des zweiten Cursus diesmal mit in den ersten herüber genommen

worden. Diese Erweiterung dürfte Vielen um so willkommener sein, als trotz derselben eine Preiserhöhung der Schrift nicht eingetreten ist.

Die übrigen Curse des Lehrbuchs der Mathematik sind:

- 1) Zweiter Cursus der Planimetrie, 5. Aufl. 1860.
- 2) Ebene Trigonometrie, 4. Aufl. 1860.
- 3) Stereometrie und sphärische Trigonometrie, 4. Aufl. 1862.
- 4) Analytische Geometrie, 1854.
- 5) Allgemeine Arithmetik, 4. Aufl. 1859.
- 6) Algebraische Analysis und Anfangsgründe der Differentialrechnung, 3. Aufl. 1863.

Halle, den 31. März 1863.

Der Verfasser.

I n h a l t.

Erster Cursus der Planimetrie.

Einleitung.

Seite

- | | |
|---|---|
| 1. Allgemeine mathematische Vorbegriffe | 1 |
| 2. Allgemeine mathematische Grundsätze | 3 |
| 3. Gegenstand der Geometrie überhaupt | 5 |

I. Abschnitt.

Von der geraden Linie, Kreislinie, von Winkeln und Parallel-
linien.

- | | |
|---|----|
| 1. Von der geraden Linie im Besondern | 9 |
| 2. Von der Kreislinie im Allgemeinen | 10 |
| 3. Von den Winkeln | 12 |
| 4. Von den Parallellinien | 22 |

II. Abschnitt.

Von den ebenen Figuren im Allgemeinen und den Dreiecken,
namentlich deren Congruenz, im Besondern.

- | | |
|--|----|
| 1. Von den ebenen Figuren im Allgemeinen | 27 |
| 2. Von den Dreiecken | 28 |
| 3. Von der Congruenz der Figuren, insbesondere der Dreiecke . | 30 |
| 4. Lehrsätze vom Kreise, die Durchschnittspunkte der Kreislinie
mit einer Geraden oder einer andern Kreislinie betreffend . | 38 |
| 5. Aufgaben | 41 |

III. Abschnitt.

Von den Vielecken im Allgemeinen und den Parallelogrammen
im Besondern.

- | | |
|--|----|
| 1. Allgemeine Lehrsätze von Vielecken | 47 |
| 2. Von den Parallelogrammen | 51 |
| 3. Von der Gleichheit der Flächeninhalte der Parallelogramme und
Dreiecke. Pythagoräischer Lehrsatz | 56 |

IV. Abschnitt.

Seite

Von den Linien und Winkeln beim Kreise.

- | | |
|---|----|
| 1. Sehnen und Tangenten beim Kreise | 66 |
| 2. Winkel im Kreise | 67 |

V. Abschnitt.**Figuren in und um den Kreis 71****Anhang, enthaltend Materialien zur Uebung für Schüler.**

- | | |
|------------------------|----|
| 1. Lehrsätze | 81 |
| 2. Aufgaben. | 85 |

Erster Cours der Planimetrie.

Seite	Einleitung.
1	1. Allgemeine mathematische Vorbegriffe
2	2. Allgemeine mathematische Grundsätze
3	3. Gegenstand der Geometrie überhaupt

I. Abschnitt.**Von der geraden Linie, Kreislinie, von Winkeln und Parallellinien.**

9	1. Von der geraden Linie im Besondern
10	2. Von der Kreislinie im Allgemeinen
12	3. Von den Winkeln
22	4. Von den Parallellinien

II. Abschnitt.**Von den ebenen Figuren im Allgemeinen und den Dreiecken namentlich deren Congruenz, im Besondern.**

27	1. Von den ebenen Figuren im Allgemeinen
28	2. Von den Dreiecken
30	3. Von der Congruenz der Figuren, insbesondere der Dreiecke
38	4. Lehrsätze vom Kreis, die Durchschnittspunkte der Kreislinie mit einer Geraden oder einer andern Kreislinie betreffend
41	5. Aufgaben

III. Abschnitt.**Von den Vierecken im Allgemeinen und den Parallelogrammen im Besondern.**

47	1. Allgemeine Lehrsätze von Vierecken
51	2. Von den Parallelogrammen
50	3. Von der Gleichheit der Flächennhalte der Parallelogramme und Dreiecke. Pythagorischer Lehrsatz

E i n l e i t u n g.

Erstes Kapitel.

Allgemeine mathematische Vorbegriffe.

§. 1. Die Mathematik ist die Wissenschaft von den Grössen und hat die Aufgabe, die gegenseitige Abhängigkeit derselben zu untersuchen.

§. 2. Wie jede Wissenschaft, so stützt sich auch die Mathematik auf gewisse Grundwahrheiten, welche an sich klar sind und deshalb nicht bewiesen zu werden brauchen, aber auch nicht bewiesen werden können. Eine solche Grundwahrheit wird ein Grundsatz (*axioma*) genannt.

§. 3. Ausser diesen Grundsätzen stellt die Mathematik Sätze auf, die nicht an und für sich einleuchtend sind, deren Richtigkeit also durch eine Beweisführung erst dargethan werden muss. Ein solcher Satz heisst ein Lehrsatz (*theoremata*).

Der Lehrsatz besteht immer aus einer Voraussetzung (*Hypothesis* d. i. Angabe der Bedingungen, unter welchen etwas von einem Gegenstande ausgesagt wird) und der eigentlichen Behauptung (*Thesis*).

In Beziehung auf die Art der Beweisführung unterscheidet man: synthetische, bei denen man von der Hypothesis ausgeht, um zu der Thesis zu gelangen; analytische, bei denen man umgekehrt annimmt, das zu Erweisende sei wahr und durch richtige Folgerungen auf einen schon bekannten Satz kommt; — directe, welche zeigen, wie eine Behauptung aus der Voraus-

setzung folgt, und indirecte oder apagogische Beweise, welche zeigen, dass das Gegentheil der Behauptung unmöglich, der Satz also wahr ist. Der letzteren bedient man sich besonders, um Umkehrungen von Sätzen zu beweisen.

§. 4. Oft sind in einem Satze noch ein oder mehrere andere Sätze als besondere Fälle enthalten, oder es lassen sich solche Sätze unmittelbar daraus folgern, welche dann, wenn sie wichtig sind, besonders aufgestellt werden. Ein Satz dieser Art wird dann ein Zusatz (*corollarium*) genannt. Wir haben im Folgenden den Begriff des Zusatzes etwas weiter gefasst und auch solche Sätze noch mit diesem Namen belegt, die aus dem Hauptsatze erst mit Zuziehung einiger andern leichten Sätze folgen, und also auch eine förmliche Beweisführung nöthig machen.

§. 5. Verschieden von den erwähnten Sätzen ist die Aufgabe (*problema*), in welcher verlangt wird, dass irgend etwas ausgeführt, und zwar sowohl die Art der Ausführung, die Auflösung (*solutio*), angegeben, als auch die Richtigkeit derselben dargethan werden soll.

Ist die Auflösung für sich einleuchtend, so nennt man die Aufgabe eine Forderung oder einen Forderungssatz (*postulatum*).

§. 6. Der Begriff der zu behandelnden mathematischen Gegenstände wird bestimmt durch die Erklärung (*definitio*). Von irgend einem Dinge kann man aber auf doppelte Weise einen deutlichen Begriff geben; entweder dadurch, dass man die wesentlichsten Merkmale desselben angiebt, oder indem man zeigt, wie dasselbe entsteht. Eine Erklärung der ersteren Art heisst Real- oder Sacherklärung (*definitio realis*), eine Erklärung der zweiten Art dagegen eine genetische Erklärung.

Zweites Kapitel.

Allgemeine mathematische Grundsätze.

§. 7. Grundsatz. *Jede Grösse ist sich selbst gleich.* (Das Zeichen der Gleichheit ist $=$.)

Voraussetzung. A stellt irgend eine Grösse vor.

Behauptung. $A = A$.

§. 8. Grundsatz. *Ein Theil von einer Grösse ist kleiner als das Ganze. Der Theil kann also nie gleich dem Ganzen sein.*

(Das Zeichen für die Ungleichheit zweier Grössen ist $<$, an dessen Spitze das Kleinere und an dessen Oeffnung das Grössere gesetzt wird. Es bedeutet demnach $A < B$, A ist kleiner als B , und entsprechend $A > B$, A ist grösser als B .)

§. 9. Grundsatz. *Wenn zwei Grössen einer dritten gleich sind, so sind sie unter sich gleich.*

Vorausss. $\begin{cases} A = B \\ A = C. \end{cases}$

Behaupt. $B = C$.

§. 10. Grundsatz. a) *Gleiches zu Gleichem addirt, giebt Gleiches.*

(Das Zeichen der Addition ist $+$) und wird „plus“ gelesen.)

Vorausss. $\begin{cases} A = B \\ C = D. \end{cases}$

Behaupt. $A + C = B + D$.

b) *Gleiches zu Ungleichem addirt, giebt Ungleiches mit demselben Ungleichheitszeichen.*

Vorausss. $\begin{cases} A > B \\ C = D. \end{cases}$

Behaupt. $A + C > B + D$.

§. 11. Grundsatz. a) *Gleiches von Gleichem subtrahirt, giebt Gleiches.*

(Das Zeichen der Subtraction ist $-$) und wird „minus“ gelesen.)

Vorausss. $\begin{cases} A = B \\ C = D. \end{cases}$

Behaupt. $A - C = B - D$.

b) *Gleiches von Ungleichem subtrahirt, giebt Ungleiches mit demselben Ungleichheitszeichen.*

$$\text{Vorausss. } \begin{cases} A > B \\ C = D. \end{cases}$$

$$\text{Behaupt. } A - C > B - D.$$

§. 12. **Grundsatz.** *Gleiches mit Gleichem multiplicirt, giebt Gleiches.*

(Das Zeichen der Multiplication ist ($\times$) oder ein Punkt und wird „mal“ gelesen.)

$$\text{Vorausss. } \begin{cases} A = B \text{ und} \\ m = n, \text{ wo } m \text{ und } n \text{ unbenannte Zahlen vorstellen.} \end{cases}$$

$$\text{Behaupt. } A \times m = B \times n.$$

Anmerk. Sind der Multiplicator oder beide Factoren allgemeine Zahlen, welche durch kleine lateinische Buchstaben ausgedrückt werden, so wird das Multiplicationszeichen weggelassen; man schreibt demnach Am und am statt $A \times m$ und $a \times m$ oder $A.m$ und $a.m$.

§. 13. **Erklärung.** Eine Grösse durch eine ihr gleichartige messen, heisst eine Zahl finden, welche angiebt, wie vielmals die zweite in der ersten enthalten ist.

Ob sich immer eine solche Zahl wirklich genau finden lässt oder nicht, ist eine Frage, die erst später beantwortet werden kann.

§. 13b. **Grundsatz.** *Gleiches durch Gleiches dividirt oder gemessen, giebt Gleiches.*

(Das Zeichen der Division oder Messung ist ($:$) oder ein Querstrich, über welchen der Dividend und unter welchen der Divisor gesetzt wird. Das Zeichen wird „durch“ gelesen.)

$$1) \text{ Vorausss. } \begin{cases} A = B \text{ und} \\ m = n \text{ (wo } m \text{ und } n \text{ wieder unbenannte Zahlen sind.)} \end{cases}$$

$$\text{Behaupt. } \frac{A}{m} = \frac{B}{n}.$$

$$2) \text{ Vorausss. } \begin{cases} A = B \text{ und} \\ C = D, \end{cases}$$

(wo C und D mit A und B gleichartige Grössen sind).

$$\text{Behaupt. } \frac{A}{C} = \frac{B}{D}.$$

§. 14. **Grundsatz.** *Wenn von zwei gleichen Grössen die eine grösser oder kleiner als eine dritte ist, so ist auch die andere bezüglich grösser oder kleiner als die dritte.*

Vorauss. $\begin{cases} A = B \text{ und} \\ B > C \text{ oder} \\ B < C; \end{cases}$

Behaupt. $A > C$, im zweiten Falle
 $A < C$.

Anmerk. In den meisten Compendien findet man noch mehr Grundsätze in Bezug auf Ungleichungen aufgestellt, doch lassen sich alle diese als Lehrsätze erweisen und finden sich in meinem „Lehrbuche der allgemeinen Arithmetik. Vierte Auflage. Halle 1859.“ streng erwiesen oder mit Andeutungen zum Beweise versehen. Wir haben von diesen Sätzen keinen hier aufgeführt, da in der Geometrie kaum eher von einem derselben Anwendung gemacht werden dürfte, bevor die Schüler dieselben in der Arithmetik gehabt haben.

Drittes Kapitel.

Gegenstand der Geometrie überhaupt.

§. 15. Erklärung. Die Grössen, mit welchen es die Mathematik zu thun hat, sind doppelter Art,

1. Zahlengrössen,
2. Raumgrössen.

Unter letzteren versteht man die geometrischen Körper, Flächen und Linien.

Der Theil der Mathematik, der es mit ersteren zu thun hat, führt den Namen Arithmetik; mit letzteren dagegen beschäftigt sich die Geometrie.

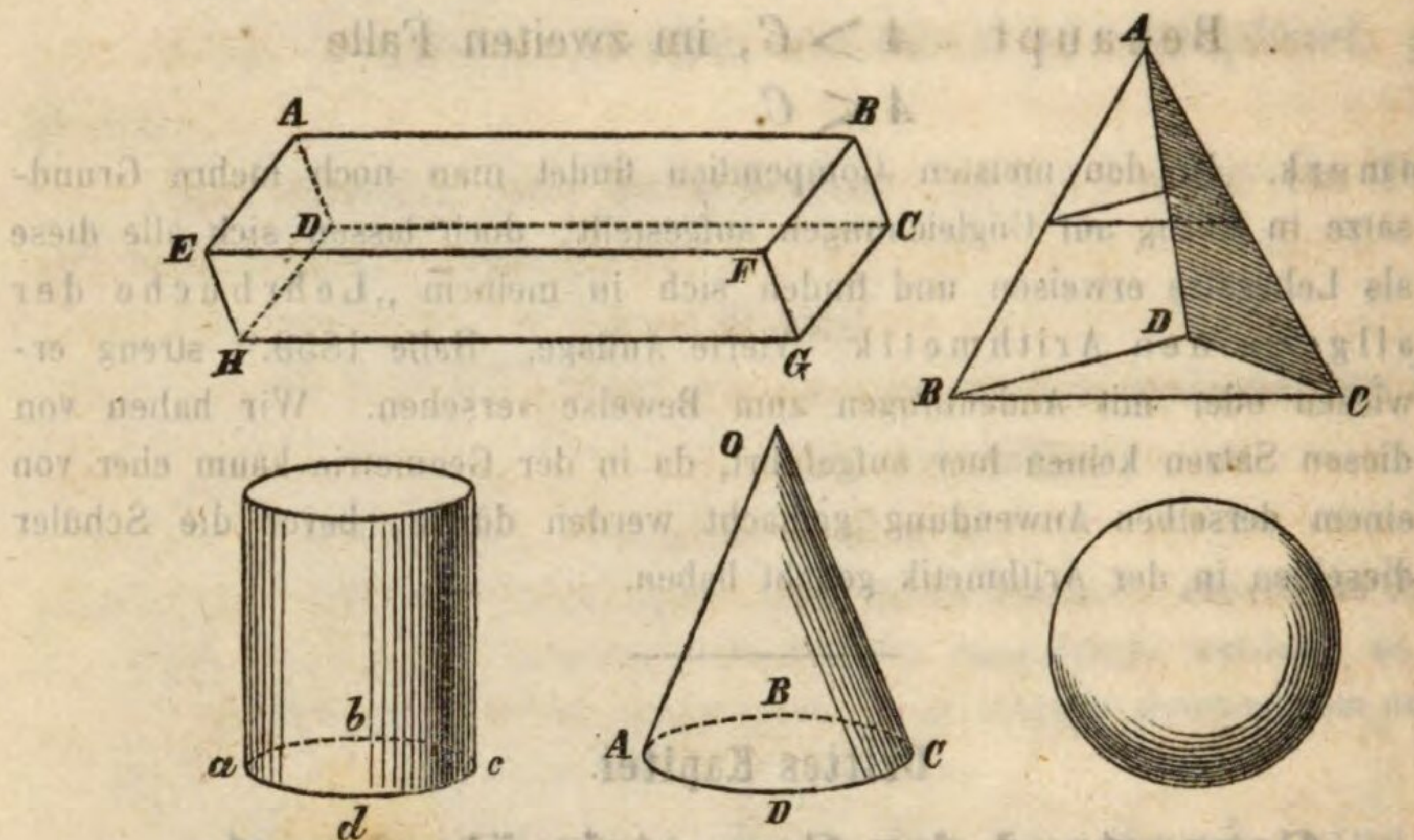
§. 16. Erklärung. Ein geometrischer Körper ist ein nach allen Seiten ausgedehnter und vollständig begränzter Raum.

Beim geometrischen Körper unterscheidet man von den unendlich vielen Richtungen, nach denen er ausgedehnt ist, drei Hauptrichtungen, die Länge, Breite, Höhe oder Dicke.

Umstehende Figur zeigt einige derjenigen Körper, mit denen sich die Mathematik vorzugsweise beschäftigt: ein Parallelepipedon, eine Pyramide, einen Cylinder, einen Kegel, eine Kugel.

Anmerk. Aus der gegebenen Definition geht hervor, dass ein geometrischer Körper nicht in der Wirklichkeit, sondern nur in unserer Vorstel-

lung existirt. Man gelangt zum Begriffe desselben, wenn man sich von einem gewöhnlichen (physischen) Körper alle Eigenschaften ausser seiner Grösse und Form wegdenkt.



§. 17. Erklärung. Die Grenze eines Körpers wird Fläche genannt. Aus dem Begriffe der Grenze folgt, dass die Fläche kein Theil des Körpers ist, deshalb auch nicht drei Ausdehnungen, sondern nur die Ausdehnungen in die Länge und Breite hat.

§. 18. Erklärung. Die Grenzen einer Fläche heissen Linien. Die Linie ist deshalb kein Theil der Fläche und hat mithin von den zwei Ausdehnungen der letztern nur noch die in die Länge. Eine halbbegrenzte Gerade wird ein Strahl, eine begrenzte hingegen eine Strecke genannt.

§. 19. Erklärung. Die Grenzen einer Linie heissen Punkte. Ein Punkt ist deshalb kein Theil einer Linie und hat somit auch keine Ausdehnung.

Anmerk. Eine Linie kann nicht durch Aneinandersetzung von Punkten gebildet werden, weil eben der Punkt kein Theil der Linie ist; wohl aber kann durch Fortbewegung eines Punktes eine Linie erzeugt werden, und man kann demnach eine Linie auch als den zurückgelegten Weg eines Punktes bezeichnen. In gleicher Weise kann eine Fläche als zurückgelegter Weg einer Linie und ein Körper als zurückgelegter Weg einer Fläche betrachtet werden, während aber ebenso wenig durch Aufeinanderlegen von Flächen ein Körper erzeugt werden kann.

§. 20. Erklärung. 1) Eine Linie heisst gerade, wenn alle Theile derselben eine und dieselbe Richtung haben.

Es wird dies der Fall sein, wenn die Linie so beschaffen ist, dass jeder Theil derselben, irgendwie und irgendwo auf einen andern gelegt, letzteren vollständig deckt. Die Linie wird dann auch die Eigenschaft haben, dass sie bei einer Drehung um zwei auf ihr angenommene feste Punkte keinen Weg im Raume zurücklegt, d. h. keine Fläche beschreibt. Eine gerade Linie wird versinnlicht durch einen ausgespannten Faden, durch ein Bleiloth u. s. w.



Die Aufsuchung von Punkten, die in einerlei Richtung d. h. also in einer geraden Linie liegen, bezeichnet man mit dem Ausdrucke visiren.*)

Anmerk. Eine gerade Linie wird durch zwei Buchstaben bezeichnet, welche man, wenn sie begrenzt ist, an ihre Endpunkte, wenn sie aber als unbegrenzt gedacht werden soll, an zwei beliebige Punkte derselben setzt. Beim Lesen werden die Buchstaben hinter einander genannt und beim Schreiben neben einander gestellt.

2) Krumm dagegen heisst eine Linie, wenn kein Theil derselben gerade ist. Eine krumme Linie wird eine Curve genannt.

Anmerk. Der Begriff Richtung ist in unserm Bewusstsein begründet und lässt keine weitere Definition zu. Aus der Beschaffenheit der geraden Linie geht hervor, dass, wenn sie sich in ihrer eigenen Richtung fortbewegt, wieder eine gerade Linie und keine Fläche erzeugt wird, was jedoch bei einer Bewegung in irgend einer andern Richtung immer der Fall ist.

§. 21. Erklärung. 1) Eine Fläche heisst eben oder schlechthin eine Ebene, wenn die geradlinige Verbindung irgend zweier Punkte ihrer ganzen Länge

*) Vergl. darüber „Grundzüge der Feldmesskunde“ S. 3. Es dürfte nicht ungeeignet sein, schon hier auf die ersten Grundbegriffe des Nivellirens hinzudeuten. Das Nöthige darüber s. angeführte Schrift S. 33—42.

nach in dieselbe fällt, so weit man sie auch nach beiden Seiten verlängern mag.

Es wird dies der Fall sein, wenn die Fläche so beschaffen ist, dass, wenn man sich dieselbe noch einmal denkt und die eine verwendet auf die andere legt, kein hohler Raum zwischen beiden bleibt.

2) **K r u m m** dagegen heisst eine Fläche, wenn kein Theil derselben eben ist.

Die §. 16. befindliche Figur zeigt ausser Ebenen verschiedene krumme Flächen (Cylinder-, Kegel- und Kugelflächen).

Anmerk. Aus der Beschaffenheit einer Ebene geht hervor, dass, wenn sich diese in ihrer eigenen Richtung fortbewegt, der zurückgelegte Weg wieder eine Ebene sein wird, dagegen bei einer Bewegung in irgend einer andern Richtung immer ein Körper entsteht.

§. 21b. **Zusatz.** Jede in einer Ebene gezogene Gerade theilt diese in zwei Theile, welche auf entgegengesetzten Seiten dieser Geraden liegen.

§. 22. **Erklärung.** Von den im Vorhergehenden näher bezeichneten Raumgrössen werden die Körper und diejenigen Flächen, und Linienverbindungen, welche nicht in einer und derselben Ebene liegen, besonders behandelt, und es führt dieser Theil der Geometrie den Namen körperliche Geometrie oder Stereometrie. Der andere Theil dagegen, dessen Gegenstände als in einer und derselben Ebene liegend betrachtet werden, heisst ebene Geometrie oder Planimetrie, auch wohl Epipedometrie.

Planimetrie.

Erster Abschnitt.

Von der geraden Linie, Kreislinie, von Winkeln und Parallellinien.

Erstes Kapitel.

Von der geraden Linie im Besondern.

§. 23. **Grundsatz.** *Durch einen Punkt (A) lassen sich unendlich viele Gerade legen, oder man kann eine durch den Punkt (A) gehende gerade Linie mittelst einer drehenden Bewegung um den Punkt in unendlich viele Lagen bringen.*

Soll die durch A gehende Gerade eine bestimmte feste Lage annehmen, so kann dies zunächst dadurch geschehen, dass bestimmt wird, die Gerade solle auch durch einen zweiten Punkt (B) gehen.

§. 24. **Satz.** *Alle zwischen zwei Punkten gezogenen geraden Linien fallen zusammen.*

Beweis. Fielen zwei Gerade, die zwei Punkte mit einander gemein haben, nicht zusammen, so müsste wenigstens die eine bei einer Drehung um diese beiden festen Punkte einen hohlen Raum umschreiben, was §. 20. widerspricht.

§. 24^b. **Zusätze.** 1) *Durch zwei Punkte ist eine gerade Linie, aber auch nur eine, vollkommen bestimmt, oder durch zwei Punkte lässt sich nur eine einzige gerade Linie ziehen.*

2) *Wenn zwei gerade Linien ein Stück gemein haben, so fallen sie ihrer ganzen Länge nach zusammen.*

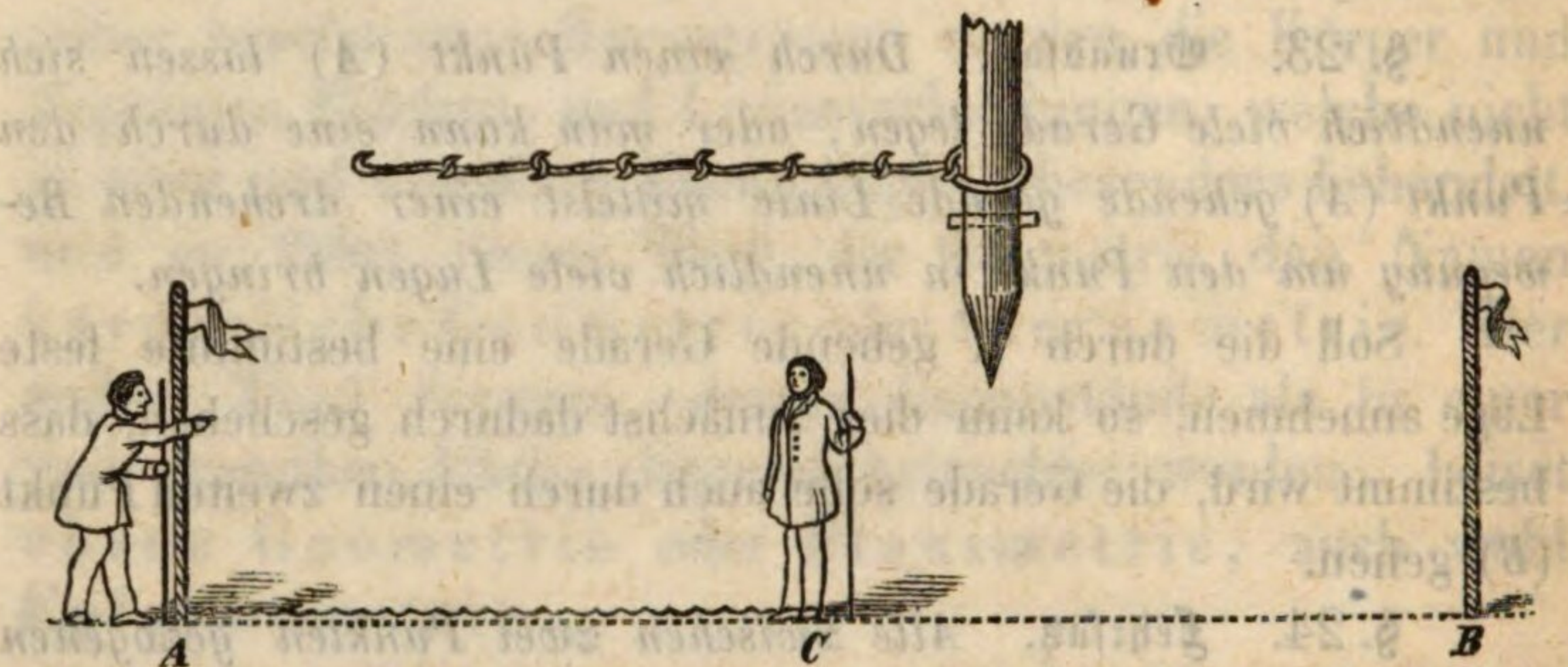
§. 25. Grundsatz. *Die gerade Linie ist die kürzeste Verbindung zweier Punkte. In dieser Beziehung heisst sie dann auch der Abstand der beiden Punkte.*

Anmerk. Der hier als Grundsatz aufgestellte Satz ist noch eines Beweises fähig, welcher auch in §. 69b. 3. gegeben ist. Will man ihn demnach als Grundsatz nicht gelten lassen, so kann er hier gestrichen und nach §. 69b. aufgestellt werden, wo dann aber auch §. 57. von seiner Stelle genommen und hinter §. 69b. gebracht werden müsste. Da §. 25 ausser in §. 57. bis dahin nirgends angewandt worden ist und von §. 57. vor §. 69b. ebenfalls kein Gebrauch gemacht wird, so würde die logische Ordnung der Sätze hierdurch gar nicht gestört werden.

§. 26. Forderungssatz. *Zwischen zwei gegebenen Punkten eine gerade Linie zu ziehen.*

§. 27. Forderungssatz. *Eine begrenzte Gerade über einen oder beide Endpunkte hinaus beliebig weit zu verlegen.*

Anmerk. Durch die folgende Figur wird die praktische Ausführung der Linienmessung mittelst der Messkette versinnlicht. Die Messung mit dem Längenmesser siehe im II. Cursus d. Planim. §. 45b.



Zweites Kapitel.

Von der Kreislinie im Allgemeinen.

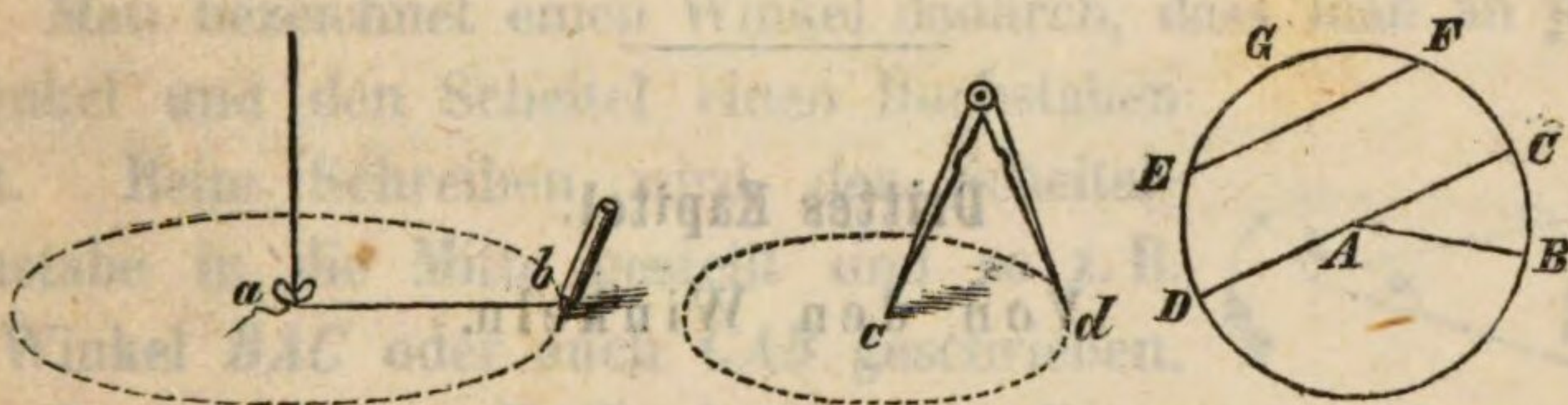
§. 28. Erklärung. 1) Von krummen Linien wird in der Elementar-Geometrie nur eine einzige betrachtet, nämlich die Kreislinie. Dieselbe ist eine in sich zurücklaufende Linie von der Beschaffenheit, dass jeder

Punkt derselben von einem innerhalb liegenden Punkte, dem Mittelpunkte (*Centrum*), gleich weit entfernt ist.

Anmerk. Dass die Kreislinie wirklich eine krumme Linie ist, d. h. dass kein Theil derselben gerade ist, muss besonders dargethan werden, was aber erst später (§. 73 b. 1.) geschehen kann.

2) Die von der Kreislinie eingeschlossene Fläche wird ein Kreis genannt. (Wo kein Missverständniss zu fürchten ist, wird auch gewöhnlich das Wort Kreis für Kreislinie gebraucht.)

3) Der Abstand eines Punktes der Kreislinie (auch Kreisperipherie, Kreisumfang genannt) vom Mittelpunkte heisst ein Halbmesser (*Radius*) des Kreises.



So sind ab , AB , AC , AD Radien.

4) Die Verbindungslinie zweier Punkte der Kreislinie heisst eine Sehne (*Chorda*), z. B. EF .

5) Jede durch den Mittelpunkth gehende Sehne heisst Durchmesser (*Diameter*) des Kreises, z. B. CD .

6) Ein Stück der Kreisperipherie heisst ein Kreisbogen (*Arcus*), z. B. EGF .

§. 28^b. *Zusätze.* Alle Radien eines Kreises sind unter einander gleich. ($AB = AC = AD$.)

2) Der Abstand jedes Punktes innerhalb der Kreislinie vom Mittelpunkte ist kleiner, jedes Punktes ausserhalb dagegen grösser als der Radius, und umgekehrt: Jenachdem der Abstand eines Punktes vom Mittelpunkte eines Kreises kleiner, ebensogross oder grösser als der Radius ist, jenachdem liegt dieser Punkt innerhalb, auf oder ausserhalb der Kreislinie.

3) Jeder Durchmesser eines Kreises ist doppelt so gross, als der Radius. ($CD = 2AC = 2AD = 2AB$.)

4) Alle Durchmesser eines Kreises sind einander gleich.

5) Einen Kreis kann man sich durch Drehung einer begrenzten geraden Linie (ab) in einer Ebene um einen ihrer Endpunkte (a) erzeugt denken, wo dann der zurückgelegte Weg dieser Linie der Kreis, der feste Punkt (a) der Linie der Mittelpunkt, der zurückgelegte Weg des andern Endpunkts (b) die Kreislinie, und die gerade Linie (ab) selbst der Radius ist.

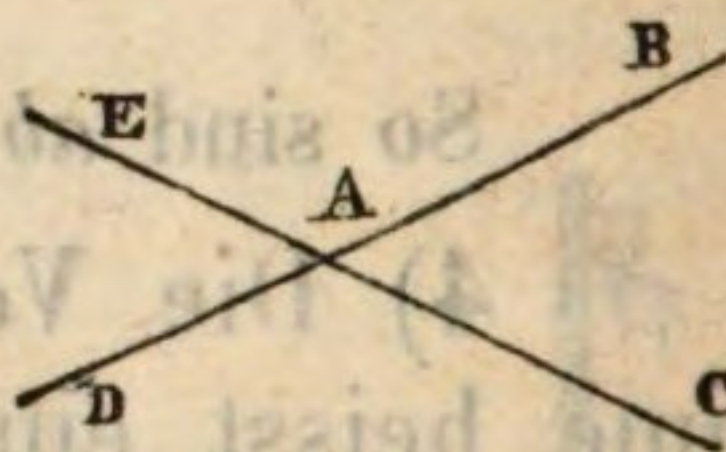
Anmerk. Hierauf gründet sich die Construction einer Kreislinie mit Hülfe des Zirkels. Der gebräuchliche Ausdruck ist dann: Mit gegebener Linie als Radius einen Kreis oder Kreisbogen schlagen. Ebenso gründet sich hierauf das Verfahren, mit Hülfe des Zirkels von einer geraden Linie ein gegebenes Stück abzuschneiden.



Drittes Kapitel.

Von den Winkeln.

§. 29. Erklärung. Wenn zwei Linien (CE, BD) einen Punkt (A) gemeinschaftlich haben, und sich ausserdem bei gehöriger Verlängerung beider Linien auf der einen (BD) zwei Punkte (B und D) angeben lassen, welche auf entgegengesetzten Seiten der andern (CE) liegen, so sagt man, sie schneiden einander, und der gemeinschaftliche Punkt (A) heisst ihr Durchschnittspunkt.



§. 29b. Zusatz. Zwei einander schneidende Linien haben verschiedene Richtungen.

Anmerk. Der durch die Anschauung gegebene und nicht weiter zu definierende Begriff „der gleichen Richtung“ ist durchaus unverträglich mit dem Durchschneiden zweier Geraden.

§. 30. Lehrsatz. Zwei gerade Linien können einander nur in einem einzigen Punkte schneiden.

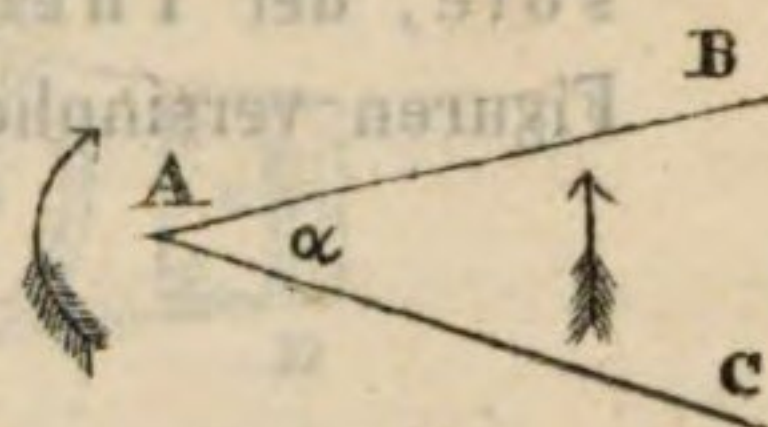
Voraus. Zwei Gerade schneiden einander.

Behaupt. Sie können nur einen einzigen Durchschnittspunkt haben.

Beweis. Wir beweisen diesen Satz indirect und haben deshalb zu zeigen, dass die Annahme, die Linien schnitten sich in zwei Punkten, auf etwas Ungereimtes d. h. einem früheren Satze oder der gesunden Vernunft Widersprechendes führt. Dies ist in der That der Fall, denn schnitten sich die beiden Linien in zwei Punkten, so müssten nach §. 24. beide Linien zusammenfallen und man hätte alsdann nicht zwei Linien, sondern nur eine, was der Annahme widerspricht.

§. 31. Erklärung. Die Abweichung der Richtungen zweier geraden Linien wird ein Winkel genannt. Der Durchschnittspunkt der beiden Linien wird der Scheitel oder die Spitze und die Linien selber die Schenkel des Winkels genannt. Die Richtungen der Linien werden stets vom Scheitel aus gerechnet.

Man bezeichnet einen Winkel dadurch, dass man an jeden Schenkel und den Scheitel einen Buchstaben setzt. Beim Schreiben wird der Scheitelbuchstabe in die Mitte gestellt und so z. B. der Winkel BAC oder auch CAB geschrieben. Beim Lesen werden die Buchstaben in dieser Reihenfolge hintereinander genannt. Häufig bezeichnet man einen Winkel aber auch mit einem Buchstaben, welchen man zwischen die Schenkel des zu bezeichnenden Winkels setzt. Winkel α ist also gleichbedeutend mit Winkel BAC . Das Winkelzeichen ist $\angle$.



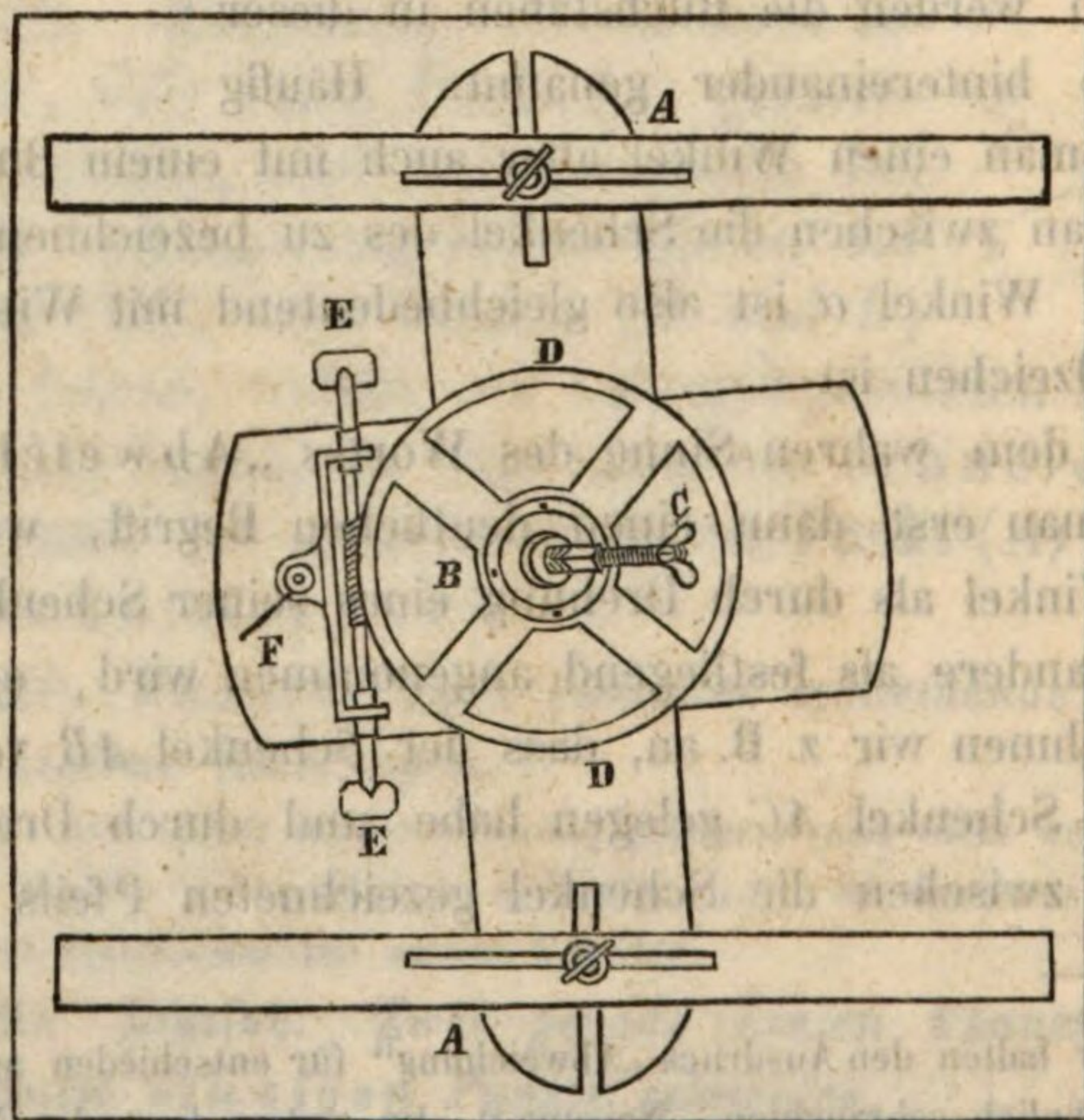
Von dem wahren Sinne des Wortes „Abweichung“*) bekommt man erst dann einen deutlichen Begriff, wenn man sich den Winkel als durch Drehung eines seiner Schenkel, während der andere als festliegend angenommen wird, entstanden denkt. Nehmen wir z. B. an, dass der Schenkel AB vorher auf dem festen Schenkel AC gelegen habe und durch Drehung im Sinne des zwischen die Schenkel gezeichneten Pfeils in seine

*) Wir halten den Ausdruck „Abweichung“ für entschieden angemessener, als den gewöhnlich gebrauchten „Neigung.“ Im erstern liegt der Nebenbegriff der Bewegung von etwas weg, im zweiten dagegen der Bewegung nach etwas hin. Der Entstehungsart des Winkels durch Drehung entspricht aber nur der erstere Begriff.

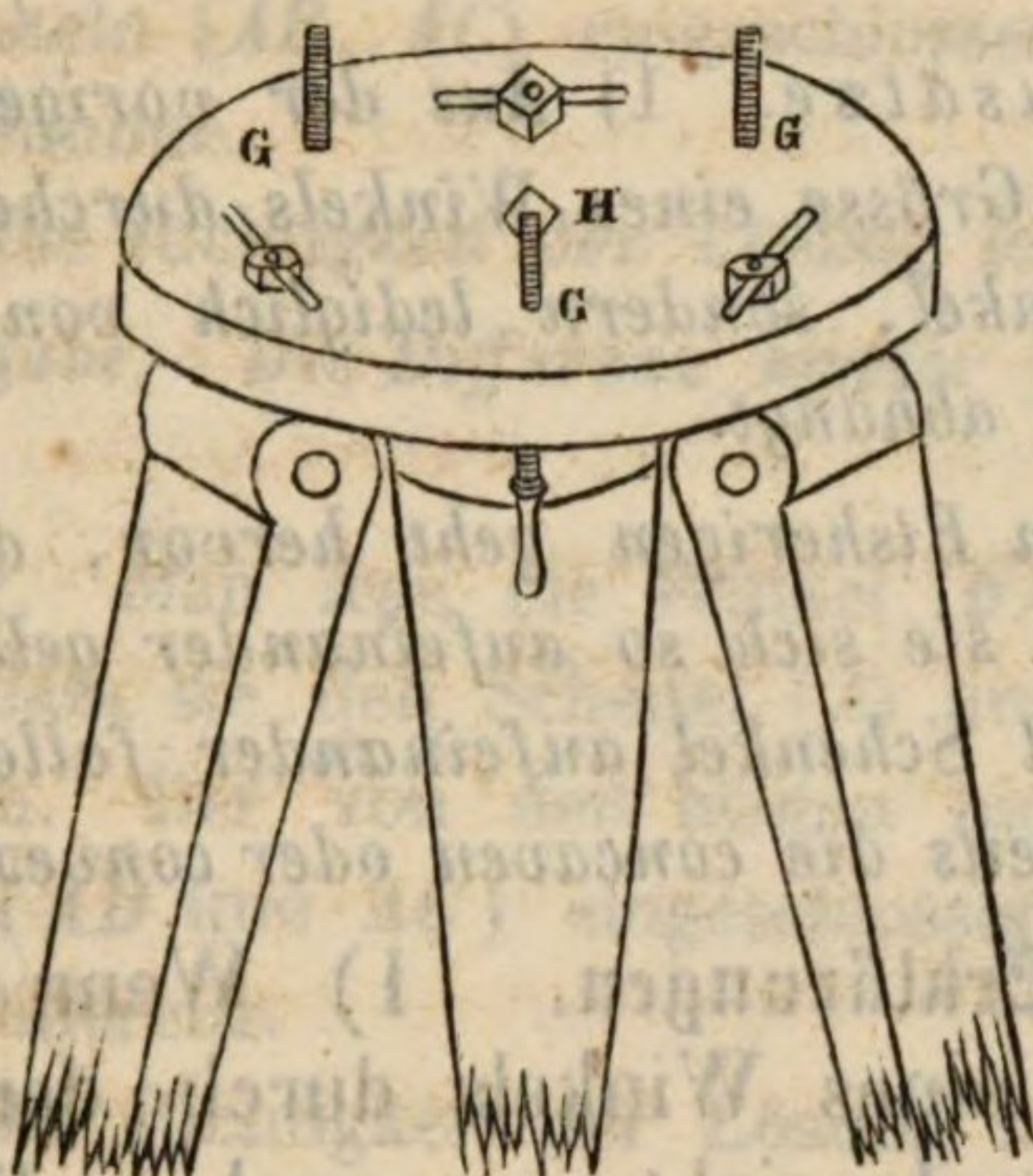
jetzige Lage gekommen sei, so sieht man leicht, dass bei fortgesetzter Drehung die Richtung des beweglichen Schenkels von der des festliegenden immer mehr abweicht, d. h. dass der Winkel immer grösser wird. Gleichzeitig erkennt man aber auch, dass der Schenkel AB in seine jetzige Lage gekommen sein würde, wenn er von AC aus im Sinne des in der Nähe des Scheitels gezeichneten Pfeils gedreht worden wäre. In diesem Falle würde er einen grössern Weg zu durchlaufen gehabt haben, und die Abweichung von der des festliegenden auch eine weit grössere und also auch der entstandene Winkel ein weit grösserer sein. Der auf die erste Art entstandene Winkel heisst ein *concaver*, der durch die zweite erhaltene ein *convexer* Winkel. Wenn im Folgenden von Winkeln ohne weitem Zusatz die Rede ist, so sind immer Winkel der erstern Art gemeint.

Anmerk. Zur Messung der Winkel dienen der Messtisch, die Boussole, der Theodolit. Die beiden ersteren werden durch nachfolgende Figuren versinnlicht.

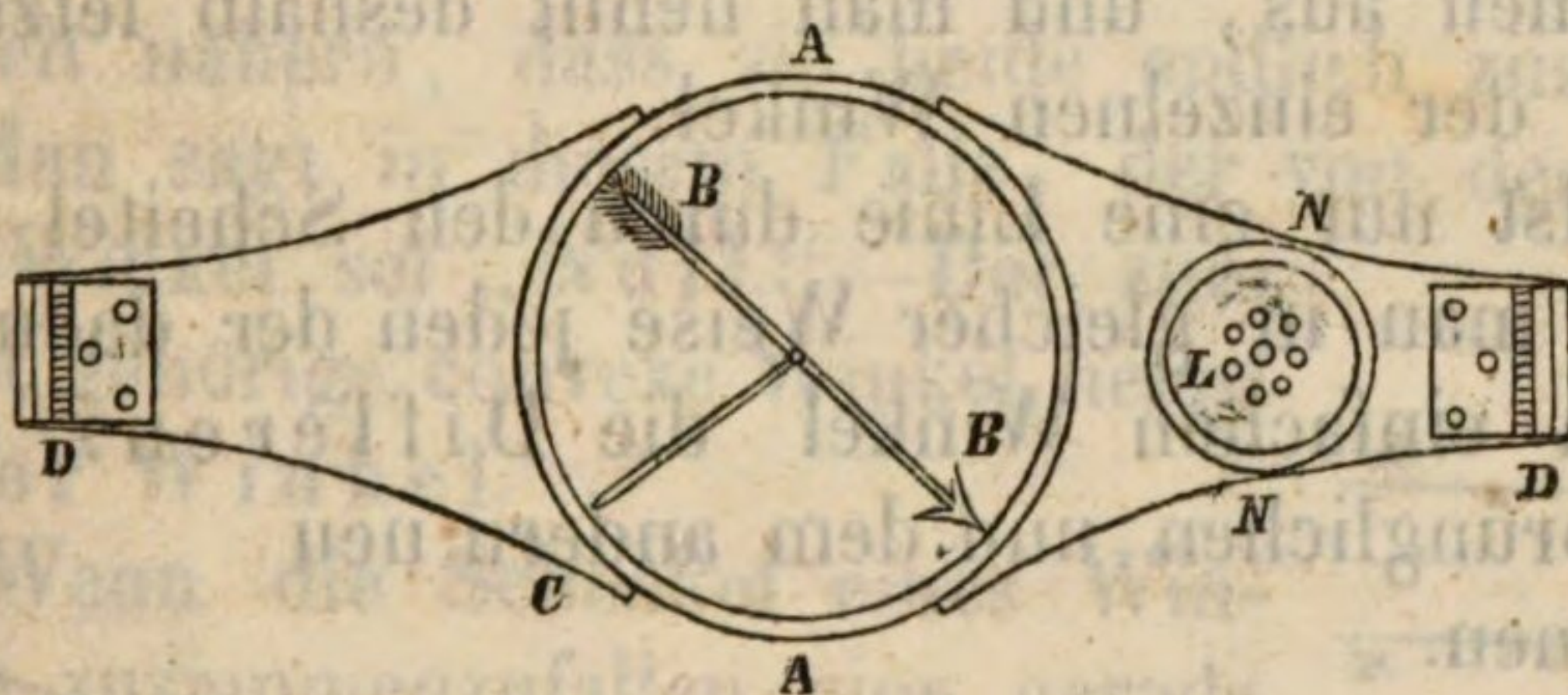
Messtisch.



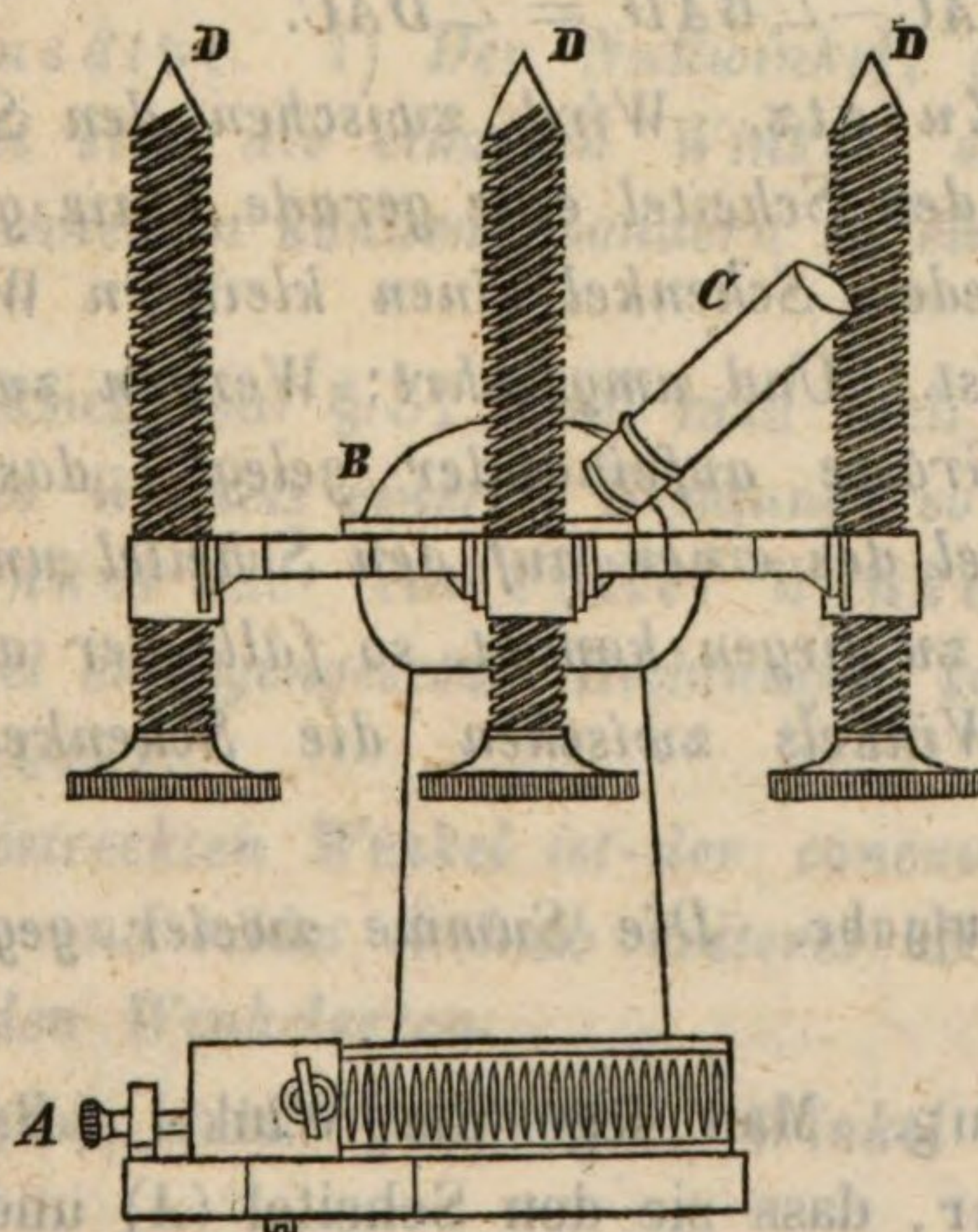
Stativ zum Messtisch.



Boussole.



Stativkopf zur Boussole.



Ueber den Gebrauch dieser Instrumente s. d. Grundzüge der Feldmesskunde p. 12 ff.

§. 31^b. *Zusätze.* 1) Aus der vorigen Erklärung geht hervor, dass die Grösse eines Winkels durchaus nicht von der Grösse der Schenkel, sondern lediglich von der Abweichung ihrer Richtungen abhängt.

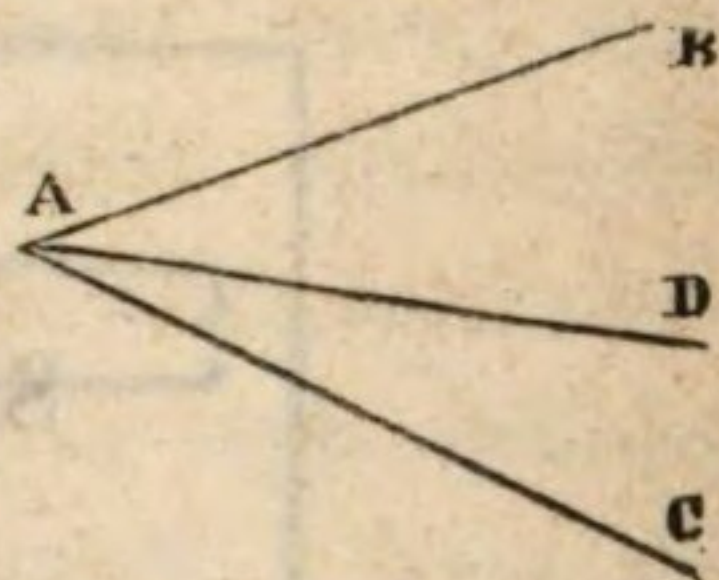
2) Aus dem Bisherigen geht hervor, dass zwei Winkel gleich sind, wenn sie sich so aufeinander gelegt denken lassen, dass Scheitel und Schenkel aufeinander fallen, vorausgesetzt, dass man beiderseits die concaven oder convexen Winkel meint.

§. 32. *Erklärungen.* 1) Wenn man zwischen den Schenkeln eines Winkels durch den Scheitel eine oder mehrere Gerade zieht, so machen die dadurch entstandenen einzelnen Winkel zusammen offenbar den ursprünglichen aus, und man nennt deshalb letzteren die Summe der einzelnen Winkel.

2) Ist nur eine Linie durch den Scheitel gezogen, so nennt man in gleicher Weise jeden der dadurch entstandenen einfachen Winkel die Differenz zwischen dem ursprünglichen und dem andern neu entstandenen.

Es ist demnach

$$\begin{aligned}\angle BAD + \angle DAC &= \angle BAC \text{ und} \\ \angle BAC - \angle BAD &= \angle DAC.\end{aligned}$$



§. 32^b. *Zusatz.* Wird zwischen den Schenkeln eines Winkels durch den Scheitel eine gerade Linie gezogen, so bildet diese mit jedem Schenkel einen kleinern Winkel, als der ursprüngliche ist. Und umgekehrt: Werden zwei Winkel von verschiedener Grösse aufeinander gelegt, dass der Scheitel und ein Schenkel des einen auf den Scheitel und einen Schenkel des andern zu liegen kommt, so fällt der andere Schenkel des kleinern Winkels zwischen die Schenkel des andern Winkels.

§. 33. *Aufgabe.* Die Summe zweier gegebenen Winkel zu finden.

Auflösung. Man lege die Winkel (BAD und CAD) so aneinander, dass sie den Scheitel (A) und einen Schen-

kel (AD) gemein haben. Der von den beiden nicht gemeinschaftlichen Schenkeln (AB , AC) eingeschlossene Winkel (BAC) ist die verlangte Summe.

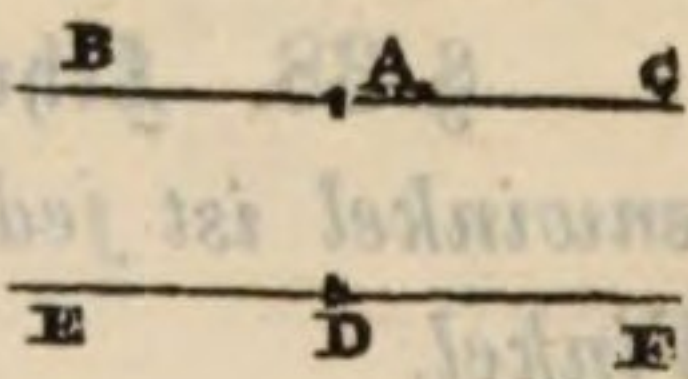
Beweis. Die Richtigkeit der Lösung folgt aus §. 32. 1.

§. 34. Aufgabe. Die Differenz zweier gegebenen Winkel zu finden.

Auflösung. Man lege die Winkel (BAC und BAD) so aufeinander, dass sie den Scheitel (A) und einen Schenkel (AB) gemein haben. Der von den beiden nicht gemeinschaftlichen Schenkeln (AD und AC) eingeschlossene Winkel (CAD) ist die verlangte Differenz.

Beweis. Die Richtigkeit der Lösung folgt aus §. 32. 2.

§. 35. Erklärungen. 1) Man kann durch Drehung des einen Schenkels eines Winkels die Schenkel einander so weit nähern, dass sie beide endlich zusammenfallen. Man sagt in diesem Falle, der von den Linien gebildete Winkel sei „Null.“ Der zum Nullwinkel gehörige convexe Winkel heisst ein voller Winkel.



2) Wenn die Schenkel eines Winkels ohne zusammenzufallen eine gerade Linie bilden, so heisst der Winkel ein gestreckter.

§. 35b. Zusätze. 1) Der Nullwinkel, der volle und gestreckte Winkel sind die einzigen Winkel, deren Schenkel einander nicht schneiden können, sondern in eine einzige Gerade fallen.

2) Mit Rücksicht auf §. 31. kann man auch sagen: Haben die Schenkel eines Winkels einerlei Richtung, so ist der Winkel ein Nullwinkel oder ein voller Winkel, haben dagegen die Schenkel entgegengesetzte Richtungen, so ist der Winkel ein gestreckter.

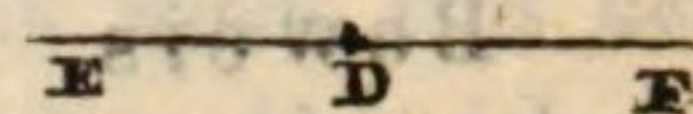
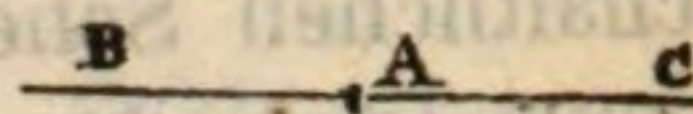
3) Beim gestreckten Winkel ist der concave Winkel dem convexen gleich, und bildet deshalb ersterer die Grenze zwischen diesen beiden Winkelarten.

§. 36. Lehrsatz. Alle gestreckten Winkel sind einander gleich.

Vorauss. $\angle BAC$ und $\angle EDF$ sind gestreckte Winkel.

Behaupt. $\angle BAC = \angle EDF$.

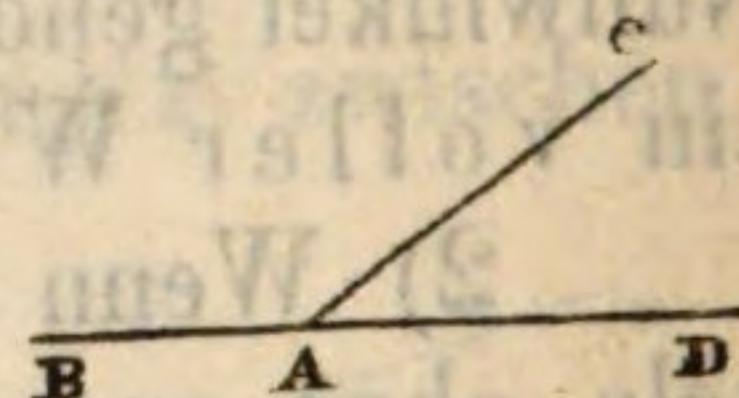
Beweis. Da die Schenkel beider Winkel gerade Linien bilden und gerade Linien jederzeit so aufeinander gelegt werden können, dass sie vollständig aufeinander fallen (§. 24.), so sind (§. 31b. 2.) die Winkel einander gleich, weil es in diesem Falle einerlei ist, in welchem Sinne die Winkel als entstanden gedacht werden.



§. 37. Erklärung. Wenn man den einen Schenkel eines Winkels über den Scheitel hinaus verlängert, so entsteht ein neuer Winkel, welcher der Nebenwinkel des ursprünglichen genannt wird. Nebenwinkel sind demnach solche Winkel, welche den Scheitel und einen Schenkel gemein haben und deren nicht gemeinschaftliche Schenkel eine gerade Linie bilden.

So sind $\angle BAC$ und $\angle DAC$ Nebenwinkel zu einander.

§. 38. Lehrsatz. Die Summe zweier Nebenwinkel ist jederzeit gleich einem gestreckten Winkel.



Vorauss. $\angle BAC$ und $\angle CAD$ sind Nebenwinkel.

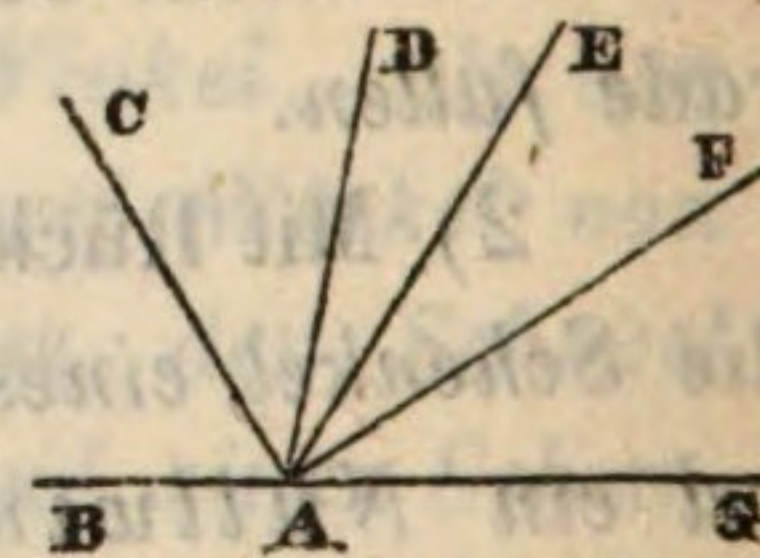
Behaupt. $\angle BAC + \angle CAD = \angle BAD$.

Beweis. Folgt unmittelbar aus §. 32.

§. 38b. Zusätze. 1) Alle Nebenwinkelpaare sind unter sich gleich.

$$\begin{aligned} \angle BAF + \angle FAG &= \angle BAE + \angle EAG \\ &= \angle BAD + \angle DAG = \angle BAC + \angle CAG. \end{aligned}$$

2) Zu gleichen Winkeln gehören gleiche Nebenwinkel.



§. 39. Erklärung. Sind zwei Nebenwinkel einander gleich, so heisst jeder ein rechter Winkel oder schlechthin ein Rechter. Ein rechter Winkel ist also ein solcher, der seinem Nebenwinkel gleich ist.

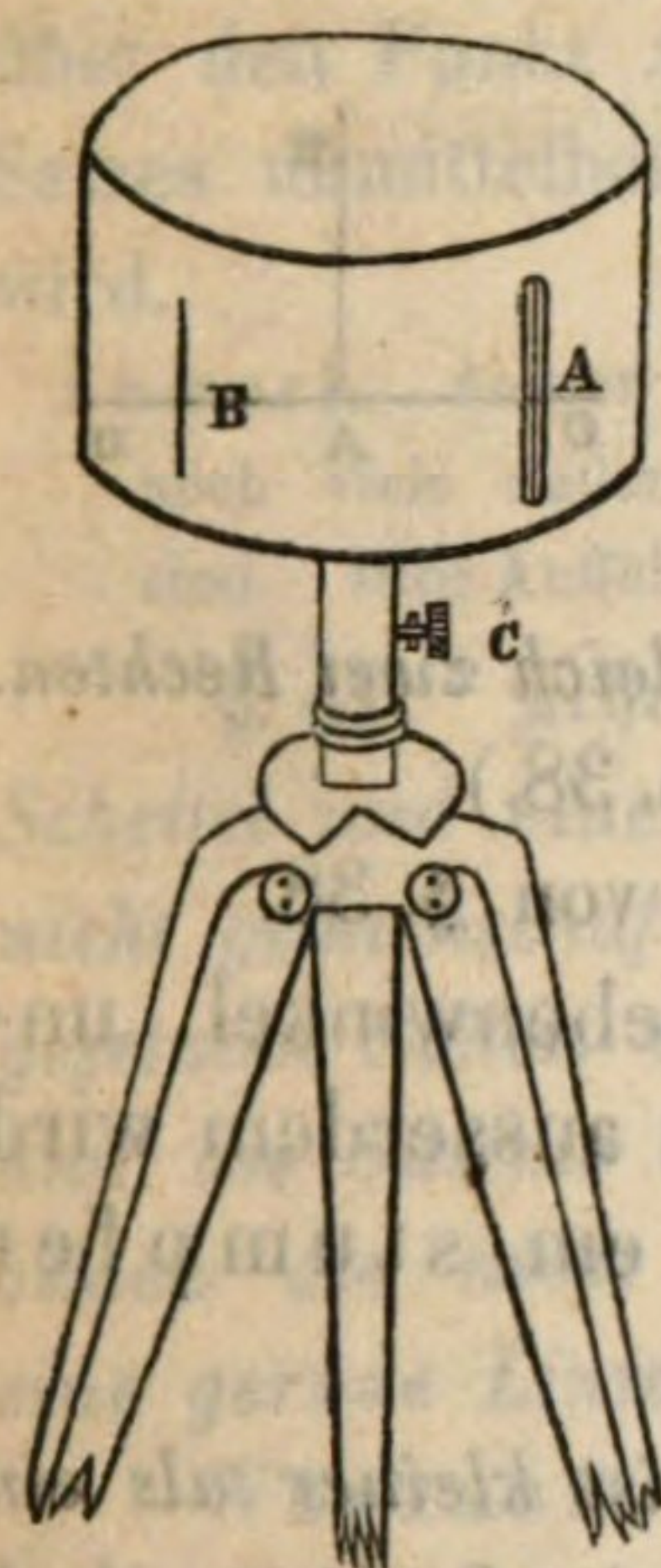
Von den Schenkeln eines rechten Winkels sagt man, dass jeder auf dem andern senkrecht (lothrecht,

perpendicular) stehe und nennt jeden Schenkel in Bezug auf den andern ein Loth (Perpendikel, eine Senkrechte).

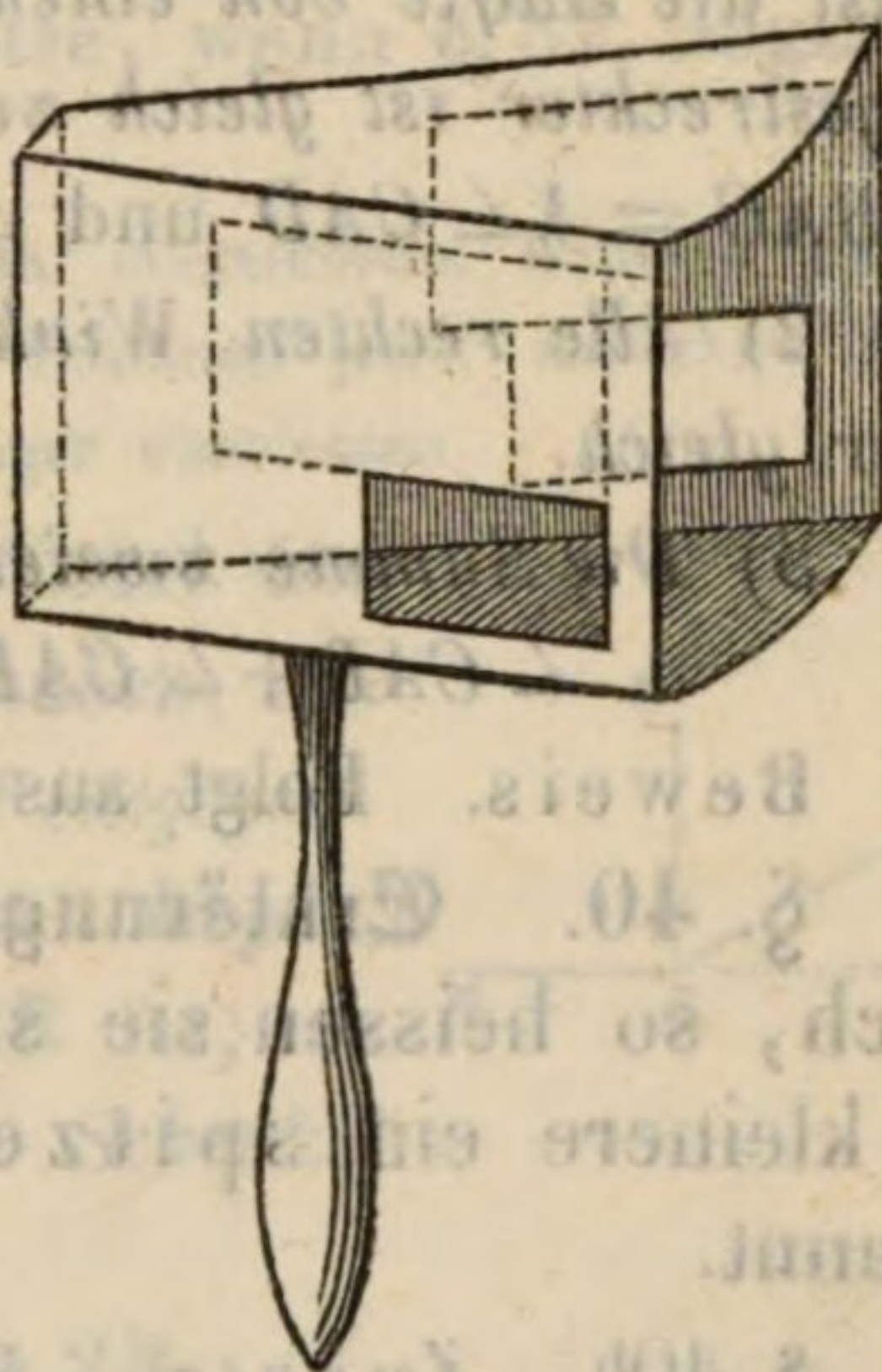
(Das Zeichen der Perpendicularität ist $\perp$) und man schreibt $AB \perp CD$ oder auch $CD \perp AB$. Einen rechten Winkel bezeichnet man durch R .)

Anmerk Zur Absteckung rechter Winkel im Felde bedient man sich der Kreuzscheibe, des Winkelspiegels,

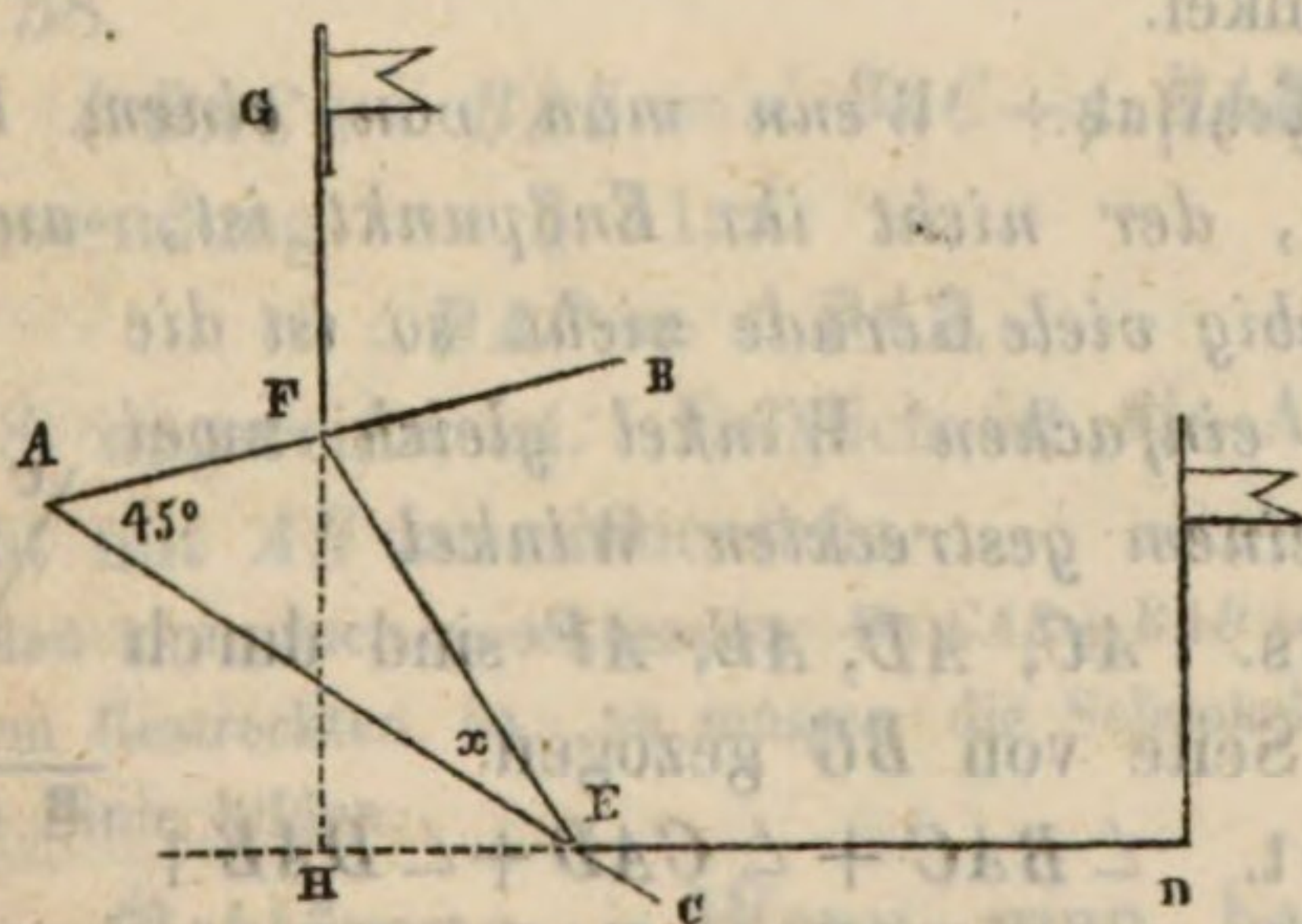
Kreuzscheibe.



Winkelspiegel.



welches letzteren Theorie aus nachfolgender Figur deutlich wird; ferner .



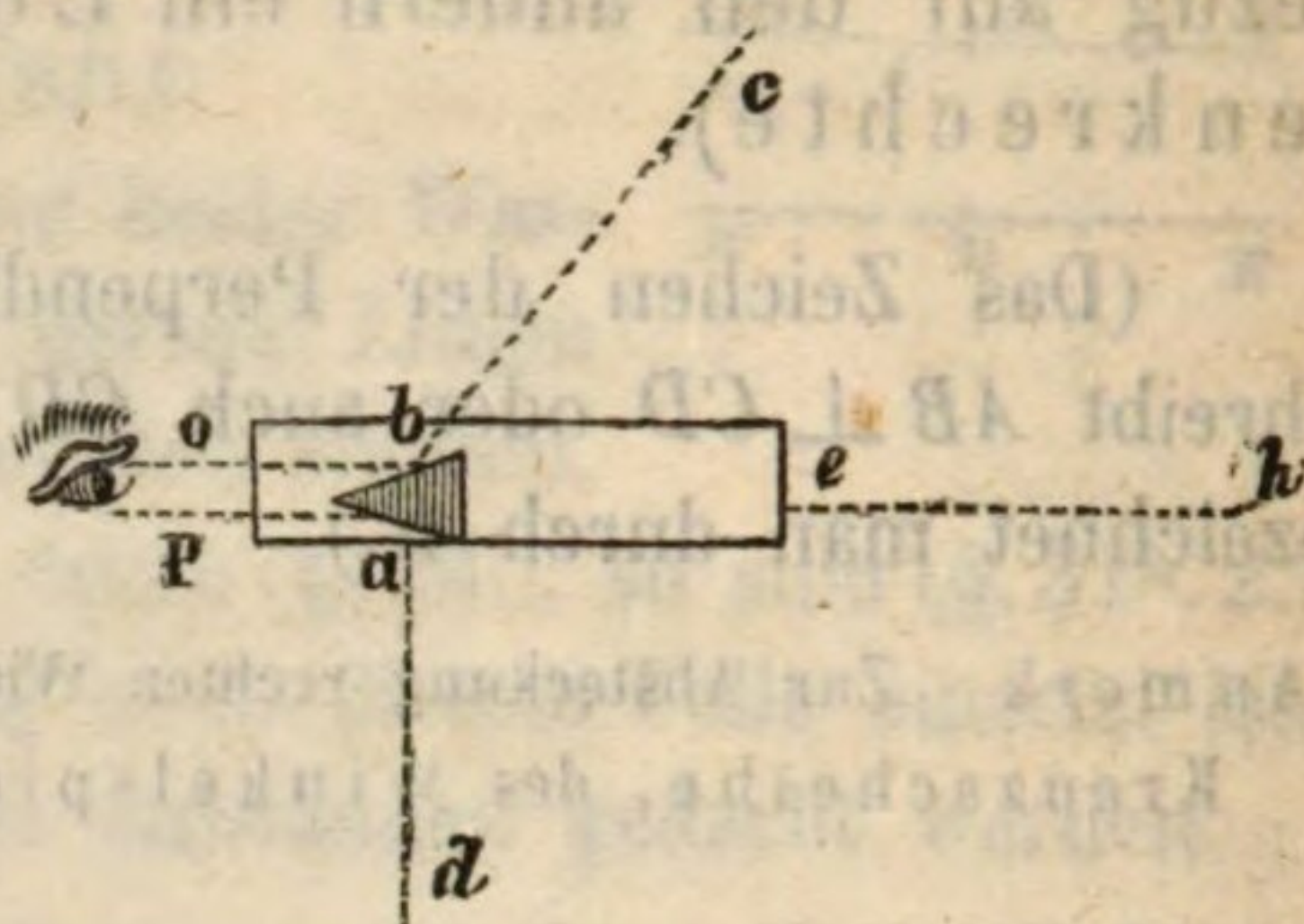
Spiegeldiopter.

des Spiegeldiopters, welcher auch zur Absteckung eines Winkels von 45° gebraucht werden kann.

(Ueber die Einrichtung und den Gebrauch dieser Instrumente findet sich das Weitere in meiner Schrift:

„Grundzüge der Feldmesskunde.“

3. Aufl. S. 7—10 und 23—24.)



§. 39b. *Zusätze.* 1) *Ein rechter Winkel ist die Hälfte von einem gestreckten, oder ein gestreckter ist gleich zwei Rechten.*

$$\angle BAC = \frac{1}{2} \angle CAD \text{ und } \angle BAD = \frac{1}{2} \angle CAD.$$

2) *Alle rechten Winkel sind unter einander gleich.*

3) *Die Summe zweier Nebenwinkel ist gleich zwei Rechten.*

$$\angle CAB + \angle CAD = 2R. \text{ (Fig. zu §. 38.)}$$

Beweis. Folgt aus 1) mit Zuziehung von §. 38.

§. 40. *Erklärung.* Sind zwei Nebenwinkel ungleich, so heissen sie schiefe Winkel, ausserdem wird der kleinere ein spitzer, der grössere ein stumpfer genannt.

§. 40b. *Zusatz.* Ein spitzer Winkel ist kleiner als ein Rechter, ein stumpfer hingegen grösser als ein Rechter, doch kleiner als ein Gestreckter.

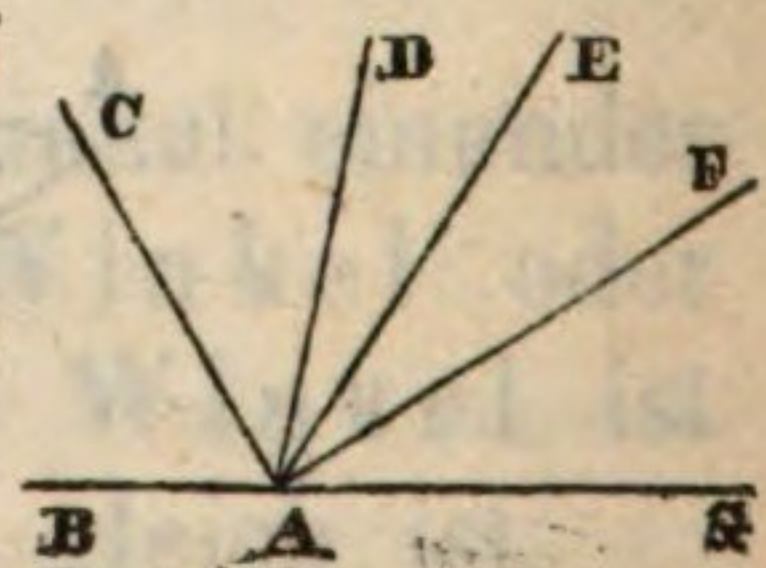
In vorerwähnter Figur ist $\angle CAB$ ein stumpfer und $\angle CAD$ ein spitzer Winkel.

§. 41. *Lehrsatz.* Wenn man von einem Punkte einer geraden Linie, der nicht ihr Endpunkt ist, auf einer Seite derselben beliebig viele Gerade zieht, so ist die Summe aller einfachen Winkel gleich zwei Rechten oder einem gestreckten Winkel.

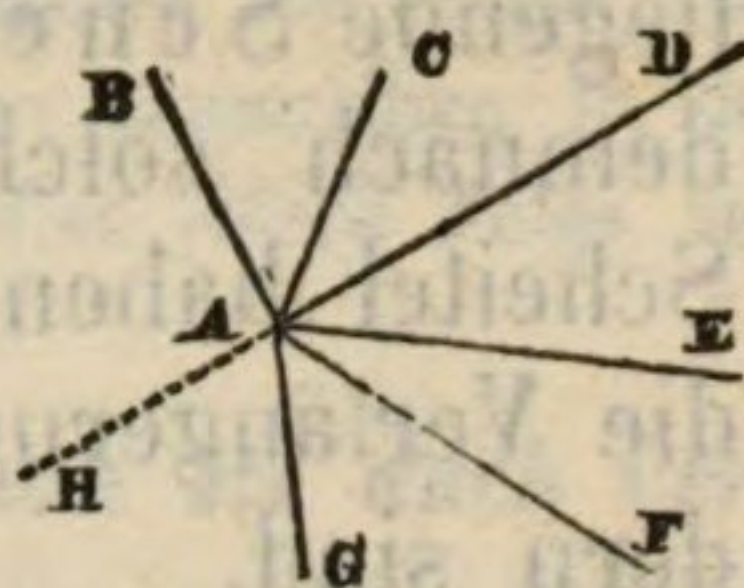
Voraus. AC, AD, AE, AF sind durch A auf einerlei Seite von BG gezogen.

$$\text{Behaupt. } \angle BAC + \angle CAD + \angle DAE + \angle EAF + \angle FAG = 2R.$$

Beweis. Folgt aus §. 32. und §. 39b. 1.



§. 41b. *Zusatz.* Wenn von einem Punkte in einer Ebene beliebig viel Linien nach den verschiedensten Richtungen gezogen werden, so beträgt die Summe aller einfachen Winkel $4R$.



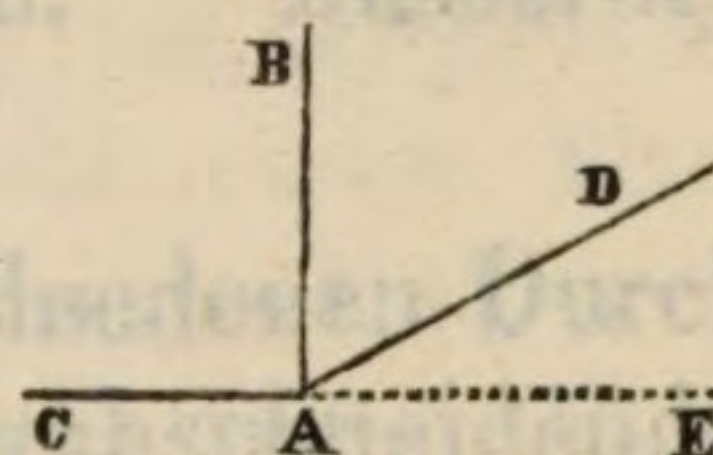
Voraus. AB, AC, AD , etc. sind Linien, die in einer Ebene liegen und von einem Punkt ausgehen.

Behaupt. $\angle BAC + \angle CAD + \angle DAE + \angle EAF + \angle FAG + \angle GAB = 4R$.

Beweis. Man verlängere eine dieser Linien, z. B. AD , über den Punkt A hinaus bis H , dann folgt die Richtigkeit des Satzes unmittelbar aus dem Hauptsatze, wenn §. 32. zugezogen wird.

Anmerk. Ausser den in vorigen Figuren aufgeführten Winkeln kommen noch viele andere Winkel vor, welche Summen jener einfachen Winkel sind. Ihre Aufführung bleibe dem Anfänger überlassen.

§. 42. *Lehrsatz.* Wenn zwei Winkel den Scheitel und einen Schenkel gemein haben, die nicht gemeinschaftlichen Schenkel auf entgegengesetzten Seiten des gemeinschaftlichen liegen, und die Summe beider Winkel $= 2R$ ist; so bilden die nicht gemeinschaftlichen Schenkel eine gerade Linie.



Voraus. $\angle BAC + \angle BAD = 2R$.

Behaupt. CA und AD liegen in gerader Linie.

Beweis. Gesetzt CA und AD lägen nicht in gerader Linie, so könnte man CA um AE verlängern und erhielte demnach nach §. 38.

$$\angle BAC + \angle BAE = \angle BAC + \angle BAD$$

und nach Anwendung von §. 11. a.

$$\angle BAD = \angle BAE,$$

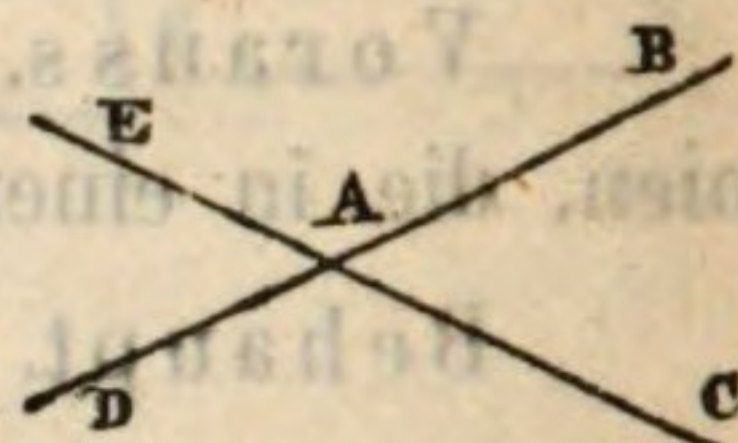
was nach §. 8. ungereimt ist. Folglich ist die Annahme falsch, dass DA nicht mit AE zusammenfiele.

Anmerk. Man kann auch so schliessen: Da $CAB + BAD = CAD = 2R$, oder gleich einem Gestreckten ist, so müssen die Schenkel des Winkels CAD eine gerade Linie bilden.

§. 43. *Erklärung.* Wenn man beide Schenkel eines Winkels über den Scheitel hinaus verlängert, so

erhält man vier Winkel, von denen je zwei gegenüberliegende Scheitelwinkel heißen. Scheitelwinkel sind demnach solche Winkel, die einen gemeinschaftlichen Scheitel haben, und bei denen die Schenkel des einen die Verlängerungen der Schenkel des andern sind.

In nebenstehender Figur sind BAC und EAD und ebenso CAD und EAB Scheitelwinkelpaare.



§. 44. *Lehrsatz.* Je zwei Scheitelwinkel sind einander gleich.

Voraus. $\angle BAC, \angle EAD$ sind Scheitelwinkel.

Behaupt. $\angle BAC = \angle EAD$.

Beweis. Es ist

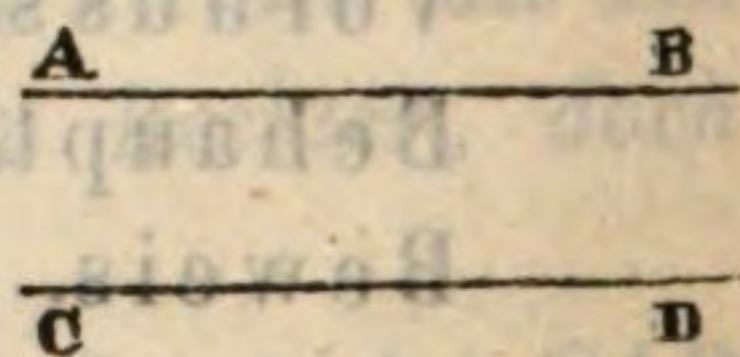
$$\angle BAC + \angle CAD = \angle EAD + \angle CAD$$

nach §. 38 b. 1., woraus nach Anwendung von §. 11. b. die Richtigkeit der Behauptung folgt.

Viertes Kapitel.

Von Parallellinien.

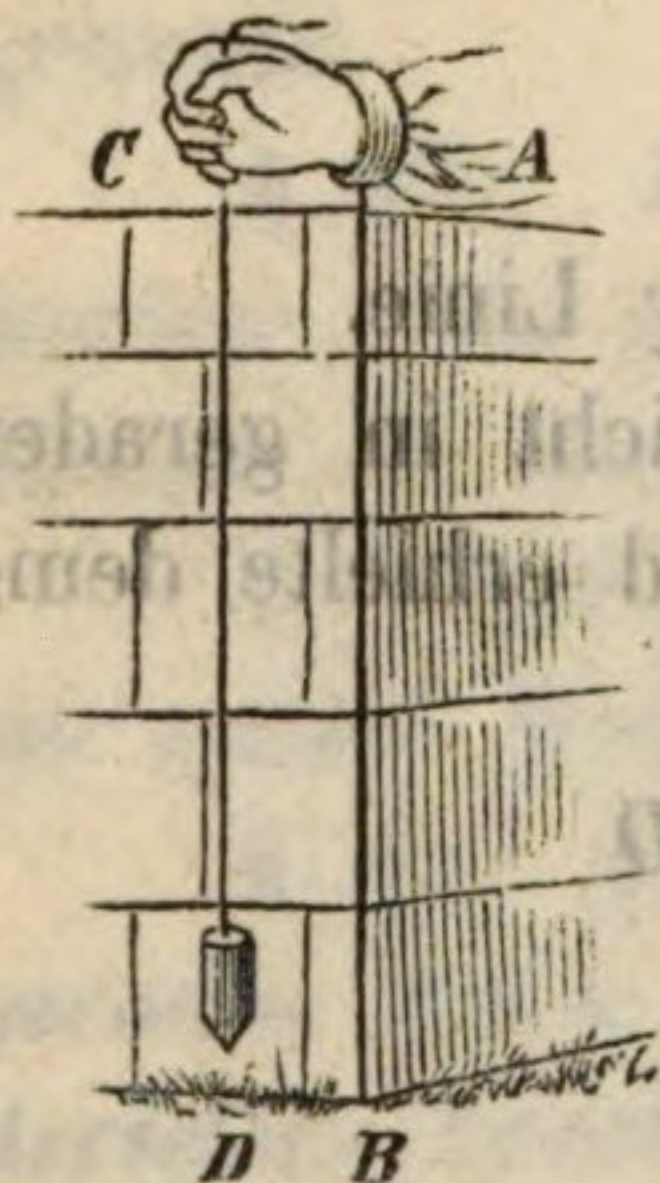
§. 45. *Erklärung.* Zwei Linien, welche, ohne zusammenzufallen, eine und dieselbe Richtung haben, nennt man gleichlaufend oder parallel.



Das Zeichen der Parallelität ist ($\parallel$) und man schreibt $AB \parallel CD$. Die linksstehende Figur veranschaulicht eine Anwendung der Parallelität zweier geraden Linien.

§. 46. *Lehrsatz.* 1) *Parallele Linien schneiden einander niemals und nirgends, so weit man sie auch nach beiden Seiten verlängern mag.*

Beweis. Wenn sich parallele Linien jemals schneiden könnten, so hätten sie verschiedene Richtungen (§. 29 b.), was dem Begriffe von parallelen Linien widerspricht (§. 45.).



Anmerk. In der Wirklichkeit scheint es, als wenn dieser Satz nicht wahr wäre. Denn sieht z. B. ein Auge längs einer Pappelallee auf beiden Seiten einer Landstrasse, so scheinen sich die beiden Baumreihen in der Ferne immer mehr und mehr zu nähern. Es ist dies jedoch Folge von der verschiedenen Grösse der Gesichtswinkel.

2) *Wenn zwei gerade Linien, so weit man sie auch verlängern mag, doch nie zum Durchschnitt kommen, so sind sie parallel.*

Beweis. Wenn zwei nicht zusammenfallende Gerade, so weit man sie auch nach beiden Seiten verlängere, niemals zum Durchschnitt kommen, so können sie auch keinen Winkel mit einander bilden, d. h. keine Richtungsabweichung haben, sie müssen daher einerlei Richtung haben d. h. parallel sein.

§. 47. **Erklärungen.** 1) Wenn zwei Linien von einer dritten durchschnitten werden, so entstehen überhaupt acht Winkel, von denen die zwischen den durchschnittenen Linien liegenden innere, die ausserhalb derselben liegenden äussere heissen. Ausserdem nennt man

2) je zwei Winkel, welche an verschiedenen Durchschnittspunkten auf einerlei Seite der durchschneidenden Linie liegen, und von denen der eine ein äusserer, der andere ein innerer ist, *correspondirende* oder *Gegenwinkel*. Endlich heissen

3) je zwei innere oder äussere Winkel, welche an verschiedenen Durchschnittspunkten und verschiedenen Seiten der durchschneidenden Linie liegen, *Wechselwinkel*.

In nachstehender Figur sind ABC und BEF , ABD und BEG , CBE und FEH , DBE und GEH *correspondirende Winkel* und DBE und BEF , CBE und BEG *innere*, hingegen ABC und GEH , sowie ABD und FEH *äussere Wechselwinkel*.

§. 48. **Lehrsatz.** Wenn zwei parallele Linien von einer dritten durchschnitten werden, so sind:

1) je zwei *correspondirende Winkel*,

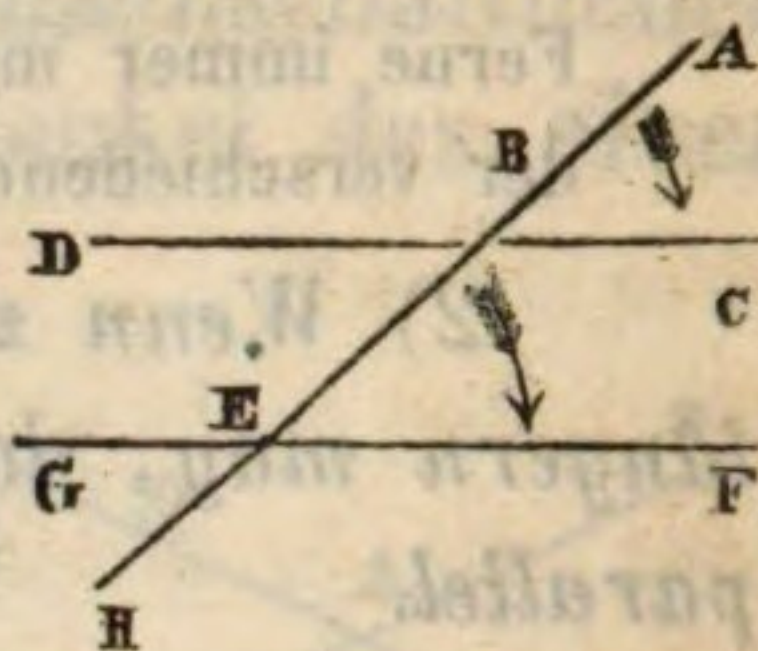
2) je zwei *Wechselwinkel* einander gleich, und

3) es beträgt die Summe je zweier innern Winkel auf einerlei Seite der Durchschneidenden zwei Rechte.

1) Vorauss. $CD \parallel FG$.

Behaupt. $\angle ABC = \angle BEF$.

Beweis. Es ist zunächst klar, dass die beiden Winkel ABC und BEF als in einem und demselben Sinne (s. §. 31.) entstanden gedacht werden können, nämlich nach unserer Figur durch Drehung der parallelen Schenkel BC und EF von der Durchschneidenden AH aus im Sinne von links nach rechts. Nun liegen aber ferner die Schenkel AB und BE auf der Durchschneidenden, also in einer und derselben Geraden, und haben demnach eine und dieselbe Richtung. In gleicher Weise haben aber auch die Schenkel BC und EF als parallele Linien eine und dieselbe Richtung, folglich muss auch die Abweichung der Richtungen der Schenkel AB und BC der Abweichung der Richtungen der Schenkel BE und EF gleich, d. h. $\angle ABC$ und $\angle BEF$, da sie, wie wir oben gesehen, in einerlei Sinne entstanden gedacht werden können, selbst gleich sein, w. z. b. w.



2) Vorauss. $CD \parallel FG$.

Behaupt. $\angle DBE = \angle BEF$.

Beweis. Nach 1. ist $\angle ABC = \angle BEF$, woraus mit Anwendung von §. 44. die Richtigkeit der Behauptung folgt.

3) Vorauss. $CD \parallel FG$.

Behaupt. $\angle CBE + \angle BEF = 2R$.

Beweis. Es ist $\angle ABC + \angle CBE = 2R$, woraus mit Zuziehung von 1. die Richtigkeit der Behauptung folgt.

§. 48^b. Zusatz. Sind die Schenkel zweier Winkel bezüglich einander parallel, so sind die Winkel entweder gleich oder Nebenwinkel zu einander.

§. 49. Lehrsatz. Wenn zwei gerade Linien von einer dritten durchschnitten werden, und es sind

1) ein Paar correspondirende, oder

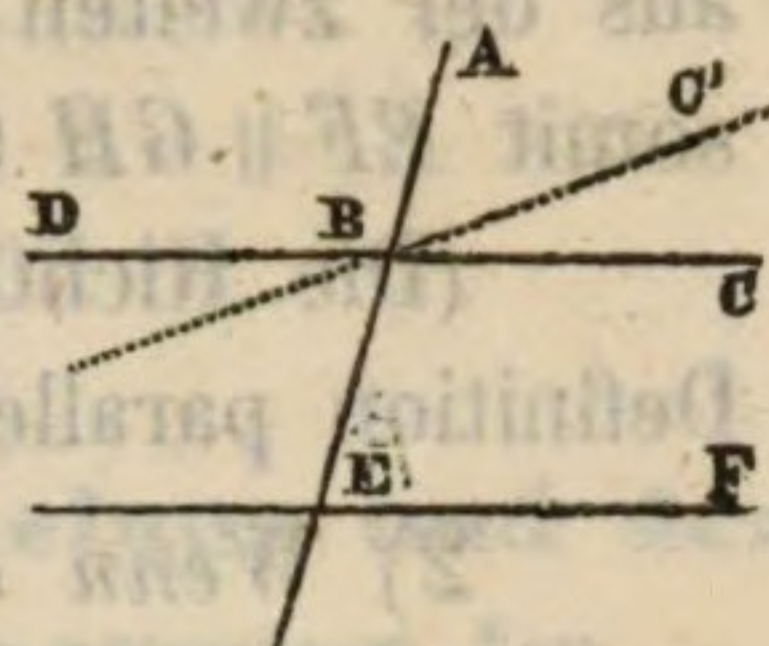
2) ein Paar Wechsel-Winkel einander gleich; oder endlich es beträgt

3) die Summe zweier innern Winkel auf einerlei Seite der Durchschneidenden zwei Rechte, so sind die durchschnittenen Linien parallel.

1) Vorauss. $\angle ABC = \angle BEF$.

Behaupt. $BC \parallel EF$.

Beweis. Es ist $\angle ABC = \angle BEF$ nach der Voraussetzung d. h. nach der Erklärung von Winkel (§. 31.), und die Abweichung der Richtung der Linie BC von der Richtung der AB ist gleich der Abweichung der Richtung der EF von der Richtung der BE . Da aber AB und BE Theile der Geraden AH sind und folglich dieselbe Richtung haben, wie die ganze Linie (§. 20.), so folgt, dass die Linien BC und EF in ihren Richtungen von einer und derselben Geraden AH gleich stark und in demselben Sinne abweichen, dass sie mithin selbst gleiche Richtung haben müssen, also parallel sind (§. 45.).



Der Satz lässt sich mittelst der Hülfslinie BC' auch leicht indirect beweisen.

2) Vorauss. $\angle DBE = \angle BEF$.

Behaupt. $DC \parallel EF$.

Beweis. Folgt aus 1. nach Anwendung von §. 44.

3) Vorauss. $\angle CBE + \angle BEF = 2R$.

Behaupt. $BC \parallel EF$.

Beweis. Es ist $\angle ABC + \angle CBE = 2R$; dies führt, zusammengehalten mit §. 9. und 11. a., auf $\angle ABC = \angle BEF$, woraus die Richtigkeit der Behauptung nach 1. folgt.

§. 50. *Zusatz.* Wenn zwei Linien auf einer und derselben dritten senkrecht stehen, so sind sie parallel.

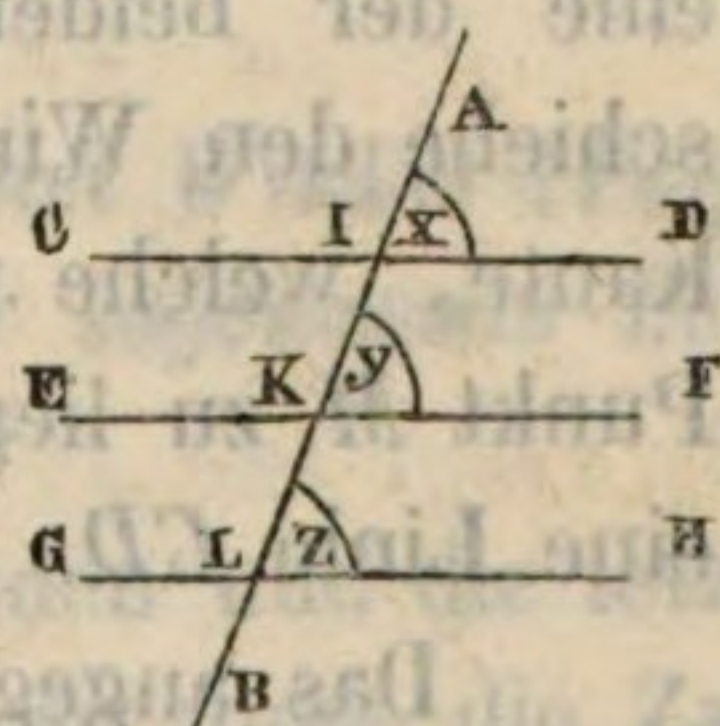
§. 51. *Lehrsätze.* 1) Wenn zwei Linien einer dritten parallel sind, so sind sie unter sich parallel.

Voraus. $CD \parallel GH$,

$CD \parallel EF$.

Behaupt. $EF \parallel GH$.

Beweis. Da drei gerade Linien, welche in einer Ebene liegen, im Allgemeinen nur drei Richtungen angeben können, so muss jede vierte Linie, die eine von den drei Richtungen verschiedene Richtung hat, jede der drei Linien schneiden. Sei nun AB eine solche Linie, welche die drei gegebenen bezüglich in I , K und L schneidet, so folgt aus der ersten Voraussetzung, dass $x = z$, und



aus der zweiten, dass $x = y$ (§. 48. 1.) ist, woraus $y = z$ und somit $EF \parallel GH$ (nach §. 49. 1.) folgt, w. z. b. w.

(Die Richtigkeit des Satzes folgt eigentlich schon aus der Definition paralleler Linien.)

2) Wenn eine gerade Linie die eine von zwei Parallelen schneidet, so schneidet sie bei gehöriger Verlängerung auch die andere.

Voraussetz. $\begin{cases} AB \parallel CD, \\ FG \text{ schneidet } CD. \end{cases}$

Behaupt. FG schneidet auch AB .

Beweis. Schnitte die Gerade FG die eine Parallele CD in E , die andere AB aber nicht, so müsste $FG \parallel AB$ sein (nach §. 45^b. 3.), was nach vorigem §., da $CD \parallel AB$ nach Voraussetzung, auf die Ungereimtheit führen würde, dass $CD \parallel FG$ wäre.

(Die Richtigkeit dieses Satzes folgt eigentlich schon aus dem Beweise des vorigen.)

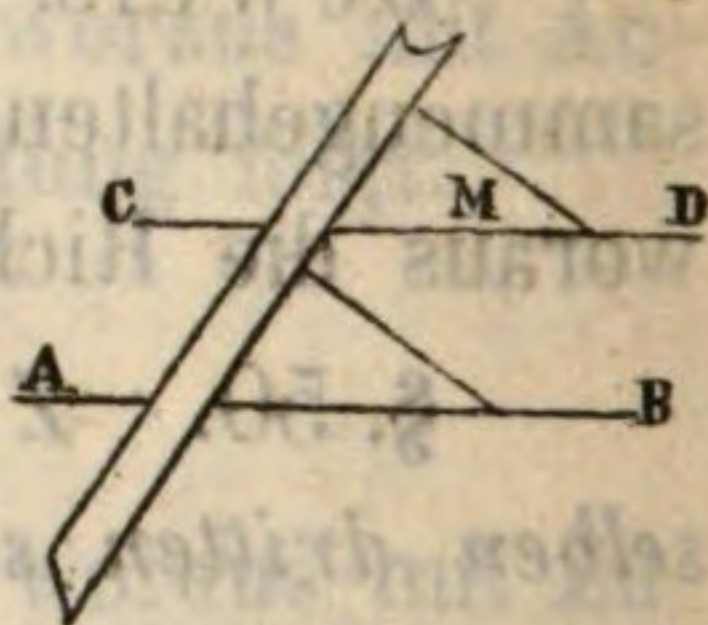
3) Durch einen Punkt ausserhalb einer geraden Linie kann man mit dieser nur eine Parallele legen.

Beweis. Folgt aus 1) und §. 45.

§. 52. Aufgabe. Durch einen gegebenen Punkt ausserhalb einer Geraden mit dieser auf mechanische Weise eine Parallele zu ziehen.

Auflösung. Man lege einen sogenannten Winkelhaken so an die gegebene Linie AB , dass eine seiner Kanten mit der Linie genau zusammenfällt. Hierauf lege man ein genaues Lineal an eine der beiden übrigen Kanten, halte das Lineal fest und schiebe den Winkelhaken an dem Lineale so weit fort, bis die Kante, welche vorher an die Linie AB gelegt wurde, auf den Punkt M zu liegen kommt. Nun ziehe man längs dieser Kante eine Linie CD . Diese ist die verlangte Parallele.

Das angegebene Verfahren stützt sich auf §. 49. 1.



Zweiter Abschnitt.

Von den ebenen Figuren im Allgemeinen und den Dreiecken, namentlich deren Congruenz im Besondern.

Erstes Kapitel.

Von den ebenen Figuren im Allgemeinen.

§. 53. Erklärungen. 1) Eine von allen Seiten begrenzte Ebene wird eine ebene Figur genannt.

2) Die ganze Grenze einer ebenen Figur heisst ihr Umfang (*Perimeter*).

3) Wird eine ebene Figur von geraden Linien (wo „drei“ die geringste Anzahl ist, da zwei gerade Linien keinen Flächenraum einschliessen können) eingeschlossen, so nennt man die Figur eine geradlinige, und jede der Linien eine Seite derselben. Ist sie von einer oder mehreren krummen Linien eingeschlossen, so heisst sie krummlinig, und ist sie endlich von geraden und krummen Linien eingeschlossen, so wird sie gemischlinig genannt.

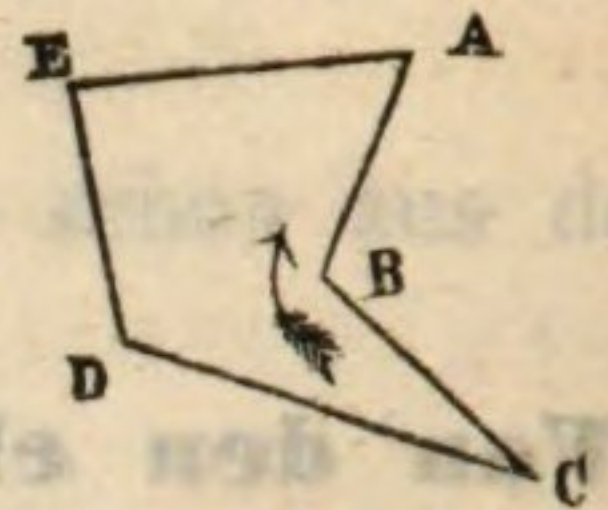
§. 54. Erklärung. Jenachdem eine ebene Figur von 3, 4, 5, n Seiten begrenzt wird, wird sie ein Dreieck, Viereck, Fünfeck und allgemein n -Eck (*Vieleck*, *Polygon*) genannt.

Zusatz. Jedes Vieleck enthält ebensoviel Winkel (*Polygonwinkel*) und also auch Winkelspitzen oder sogenannte Eckpunkte, als Seiten.

Denn da jede Seite mit der darauf folgenden und die letzte wieder mit der ersten einen Winkel bildet, so muss die Zahl der Winkel der der Seiten gleich sein.

§. 55. Erklärungen. 1) Sind die Seiten und Winkel eines Vielecks unter sich bezüglich gleich, so wird es ein reguläres Vieleck genannt.

2) Kommen in einem Vielecke ein oder mehrere convexe Winkel vor, so nennt man es ein Vieleck mit einspringenden Winkeln.



Zweites Kapitel.

Von den Dreiecken.

§. 56. Erklärungen. 1) Sind in einem Dreiecke die drei Seiten einander gleich, so heisst es ein gleichseitiges.

2) Sind in einem Dreiecke zwei Seiten einander gleich, so heisst es ein gleichschenkliges. Die gleichen Seiten heissen in diesem Falle die Schenkel, ihr Zusammenstossungspunkt die Spitze und die dritte Seite vorzugsweise die Grundlinie (*Basis*) des Dreiecks.

3) Sind alle Seiten eines Dreiecks ungleich, so heisst es ein ungleichseitiges.

4) In einem Dreiecke heisst ein aus einer Winkelspitze auf die gegenüberliegende Seite oder deren Verlängerung gefälltes Loth eine Höhe und in Bezug darauf die Seite, auf welcher sie senkrecht steht, die Grundlinie des Dreiecks.

§. 57. Lehrsätze. 1) In jedem Dreiecke ist die Summe zweier Seiten grösser als die dritte.

2) In jedem Dreiecke ist die Differenz zweier Seiten kleiner als die dritte.

Beweis. 1) Folgt unmittelbar aus §. 25. (Vergl. 69b.)

2) Folgt aus 1) mit Anwendung von §. 11.b.

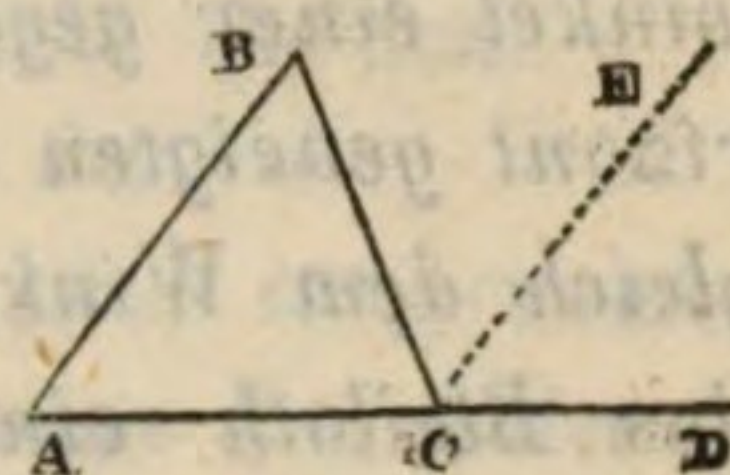
§. 58. Erklärung. Wenn man eine Seite des Dreiecks verlängert, so entsteht ein neuer Winkel, welcher Aussenwinkel des Dreiecks heisst.

§. 59. Lehrsatz. Der Aussenwinkel eines Dreiecks ist gleich der Summe der beiden Dreieckswinkel, welche nicht Nebenwinkel von ihm sind.

Vorausss. $\angle BCD$ ist Aussenwinkel des Dreiecks ABC .

Behaupt. $\angle BCD = \angle ABC + \angle BAC$.

Beweis. Nach §. 45^b. 1. muss es eine gerade Linie geben, welche durch C geht und $\parallel AB$ ist. Diese Parallele zu AB muss auch offenbar zwischen den Schenkeln des Aussenwinkels liegen, denn läge sie zwischen den Schenkeln AC und BC , so müsste sie mit AB zum Durchschnitt kommen. Sei nun CE diese Parallele, so theilt sie den Winkel BCD in zwei Stücke, BCE und ECD , wovon $BCE = ABC$ als Wechselwinkel, und $ECD = BAC$ als correspondirende Winkel sind. Wendet man noch §. 10. a. an, so folgt die Richtigkeit der Behauptung unmittelbar.



§. 59^b. *Zusatz.* Der Aussenwinkel eines Dreiecks ist immer grösser als einer der beiden Dreieckswinkel, die nicht Nebenwinkel von ihm sind.

Behaupt. $\angle BCD > \angle ABC$ und auch $\angle BCD > \angle BAC$.

§. 60. *Lehrsatz.* Die Summe aller drei Winkel im Dreieck ist gleich zwei Rechten.

Vorausss. $\angle ABC$, $\angle BCA$, $\angle CAB$ sind Winkel in einem Dreiecke.

Behaupt. $\angle ABC + \angle BCA + \angle CAB = 2R$.

Beweis. Es ist $\angle BCD + \angle BCA = 2R$ (§. 39^b. 3.), woraus mit Zuziehung von §. 59. die Richtigkeit der Behauptung folgt.

§. 60^b. *Zusätze.* 1) In einem Dreiecke kann nur ein rechter und ebenso nur ein stumpfer Winkel, wohl aber können drei spitze vorkommen.

2) Sind in einem Dreiecke zwei Winkel oder auch nur ihre Summe bekannt, so ist es auch die Summe der beiden andern.

3) Sind in zwei Dreiecken zwei Winkel bezüglich einander gleich, oder ist auch nur die Summe zweier Winkel des einen Dreiecks gleich der Summe zweier Winkel im andern, so sind es auch die dritten Winkel.

Auf den letzten dieser Zusätze gründet sich folgender praktische Satz:

2) *Gleiche gerade Linien und gleiche Winkel sind congruent und können deshalb zur Deckung gebracht werden.*

Anmerk. Bei krummen Linien ist dies nicht allgemein der Fall.

§. 63. I. Congruenzsatz. *Zwei Dreiecke sind congruent, wenn zwei Seiten des einen bezüglich zweien Seiten des andern und ausserdem die von diesen eingeschlossenen Winkel gleich sind.*

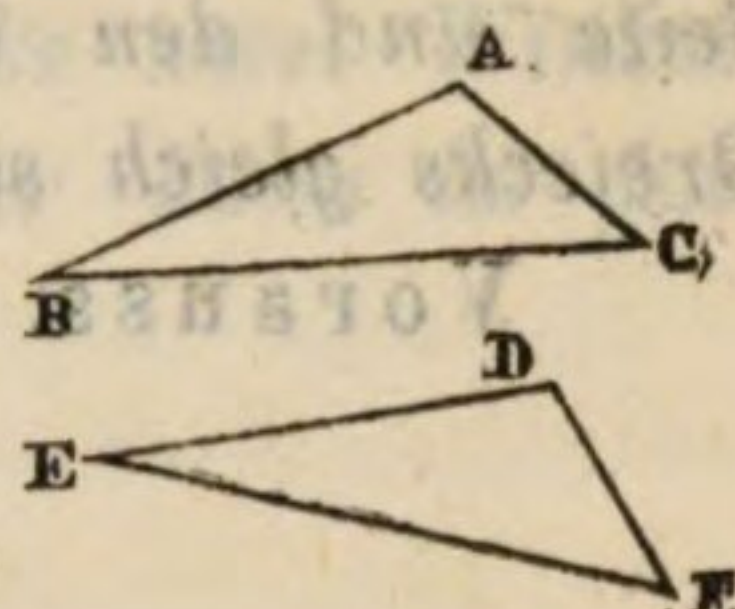
Vorauss. $AB = DE,$

$AC = DF,$

$\angle BAC = \angle EDF.$

Behaupt. $\triangle ABC \cong \triangle DEF.$

Beweis. Man denke sich das Dreieck ABC so auf das andere DEF gelegt, dass



I. der Scheitel des gegebenen Winkels A auf den Scheitel des ihm gleichen D ,

II. die eine gegebene Seite AB auf die ihr gleiche DE falle, und

III. beide Dreiecke auf einerlei Seite der gemeinschaftlichen Seite zu liegen kommen. Dann folgt hieraus:

1. dass B auf E fällt, da $AB = DE$ und A auf D liegt;

2. dass AC der Richtung nach auf DF fällt, weil $\angle BAC = \angle EDF$ ist, AB auf DE und die Winkel aufeinander liegen (§. 62. Zus. 2.);

3. dass C auf F fällt, da $AC = DF$, und A auf D liegt; und endlich

4. dass BC auf EF fällt, da die Endpunkte (B auf E und C auf F) aufeinander liegen (§. 24^b. I.). Somit decken die Dreiecke einander in allen Punkten und sind deshalb congruent.

Folgerungen für die nicht gegebenen Stücke der Dreiecke. Aus der Congruenz der beiden Dreiecke folgt nun:

1. dass $BC = EF$, da diese den gleichen Winkeln BAC und EDF gegenüberliegen;

2. dass $\angle ABC = \angle DEF$, da diese den gleichen Seiten AC und DF gegenüberliegen; und

3. dass $\angle BCA = \angle EFD$, da diese die gleichen Gegenseiten AC und DE haben.

Ebenso sind die zu gleichen Seiten gehörigen Höhen, die Halbirungslinien gleicher Winkel etc. einander gleich.

Anmerk. Die hier geschehene Zergliederung der Aufeinanderlegungs-Operationen, der Folgerungen für das Aufeinanderfallen der übrigen Dreiecksstücke und der Folgerungen für die Gleichheit der nicht gegebenen Stücke soll dem Anfänger als Norm dienen, nach welcher er die Beweise der übrigen Congruenzsätze auszuführen hat.

§. 64. II. Congruenzsatz. *Zwei Dreiecke sind congruent, wenn eine Seite und zwei Winkel des einen Dreiecks einer Seite und den beiden gleichliegenden Winkeln des anderen Dreiecks gleich sind.*

Voraus. $AB = DE,$

$ABC = DEF,$

$BAC = EDF.$

Behaupt. $\triangle ABC \cong \triangle DEF.$

Beweis. Man denke sich die Dreiecke so aufeinander gelegt, dass die Scheitel zweier gleichen gegebenen Winkel und die gleichen Seiten zusammenfallen und die Dreiecke wieder auf einerlei Seite der gemeinschaftlichen Seite zu liegen kommen. Hierauf wird das Aufeinanderfallen der andern Endpunkte der gleichen Seiten, der andern Schenkel der gegebenen Winkel und endlich der dritten Winkelspitzen gefolgert. Letzteres folgt daraus, dass, wenn zwei Linien auf zwei andere fallen, auch ihre Durchschnittspunkte zusammenfallen müssen, weil zwei gerade Linien einander nur in einem Punkte schneiden können.

Folgerungen. $BC = EF, AC = DF, BCA = EFD.$

Ist statt eines anliegenden Winkels der Gegenwinkel der gleichen Seiten gegeben, so folgt der Beweis aus §. 64. mit Zuziehung von §. 60b. 3.

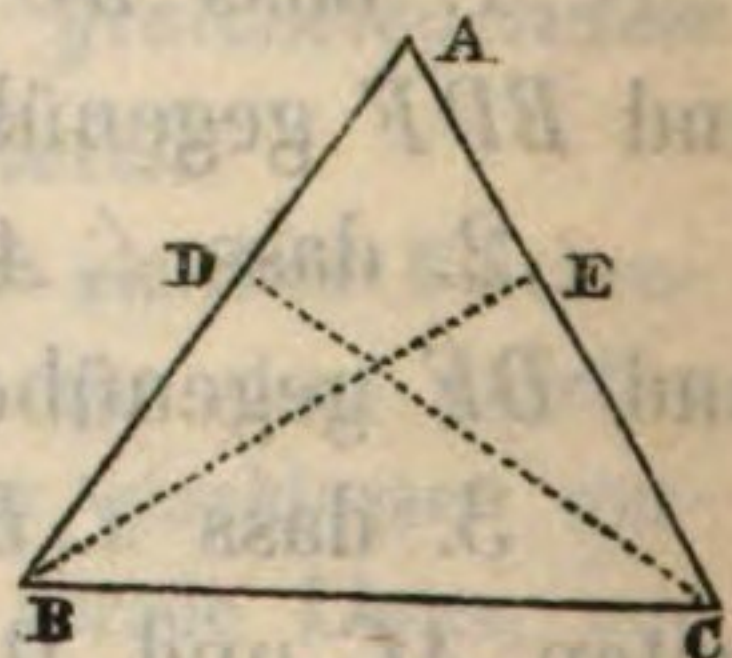
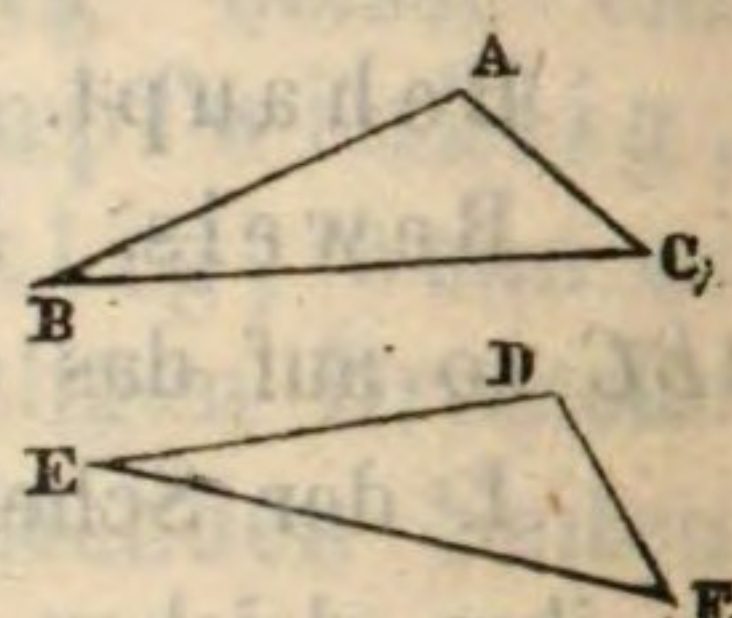
§. 65. Lehrsatz. *Sind in einem Dreiecke zwei Seiten einander gleich, so sind auch die ihnen gegenüberliegenden Winkel einander gleich. Oder:*

In jedem gleichschenkligen Dreiecke sind die Winkel an der Grundlinie einander gleich.

Voraus. $AB = AC.$

Behaupt. $\angle ACB = \angle ABC.$

Beweis. Man schneide von den gleichen Seiten AB und AC von A aus beliebige aber gleiche Stücke ab, $AD = AE$, und verbinde die Abtragungspunkte, D und E , mit den gegenüberliegenden Winkelspitzen.



Dann ist $\triangle AEB \cong \triangle ADC$ nach §. 63. Hieraus folgt $\angle ADC = \angle AEB$ und folglich auch $\angle BDC = \angle CEB$ (§. 38^b. 2.), ferner $DC = EB$, und es ist deshalb, da auch $DB = EC$, $\triangle BCD \cong \triangle CEB$, woraus $\angle ACB = \angle ABC$ folgt, w. z. b. w.

§. 65^b. *Zusatz.* In jedem gleichseitigen Dreiecke sind auch die drei Winkel einander gleich und jeder gleich $\frac{2}{3}R$.

§. 66. *Lehrsatz.* Sind in einem Dreiecke zwei Winkel gleich, so sind es auch ihre Gegenseiten, oder dann ist das Dreieck ein gleichschenkliges. (S. vor. Fig.)

Vorausss. $\angle ACB = \angle ABC$.

Behaupt. $AB = AC$.

Beweis. Man schneide auf den als gleich zu erweisenden Seiten AB und AC von den Scheiteln der gleichen Winkel B und C aus beliebige, aber gleiche Stücke, $BD = CE$, ab und verbinde wieder D mit C und E mit B . Dann ist $\triangle DBC \cong \triangle ECB$ nach §. 63. Diese Congruenz liefert die noch fehlenden gleichen Stücke zur Congruenz der obern Dreiecke ADC und AEB , die aus 64^b. folgt. Aus der letzten Congruenz folgt endlich $AB = AC$; w. z. b. w.

Anmerk. Auf diesen Satz gründet sich die Anwendung des Spiegel-
diometers (s. S. 20) zur Ausmessung des Abstandes zweier Punkte, zu
deren einem man nicht kommen, wohl aber sehen kann. (Vergl. meine
Schrift: Grundzüge der Feldmesskunde etc. S. 9 ff.)

Zusatz. Sind in einem Dreiecke alle drei Winkel einander gleich, so ist dasselbe ein gleichseitiges.

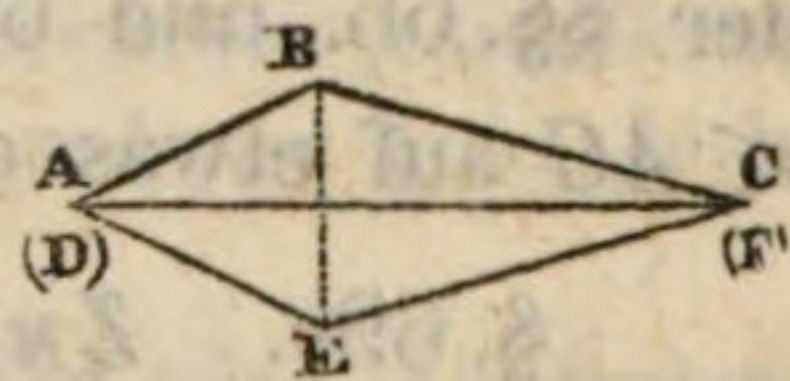
§. 67. III. *Congruenzsatz.* Zwei Dreiecke sind congruent, wenn die drei Seiten des einen bezüglich den drei Seiten des andern gleich sind.

Vorausss. $AB = DE$

$AC = DF$

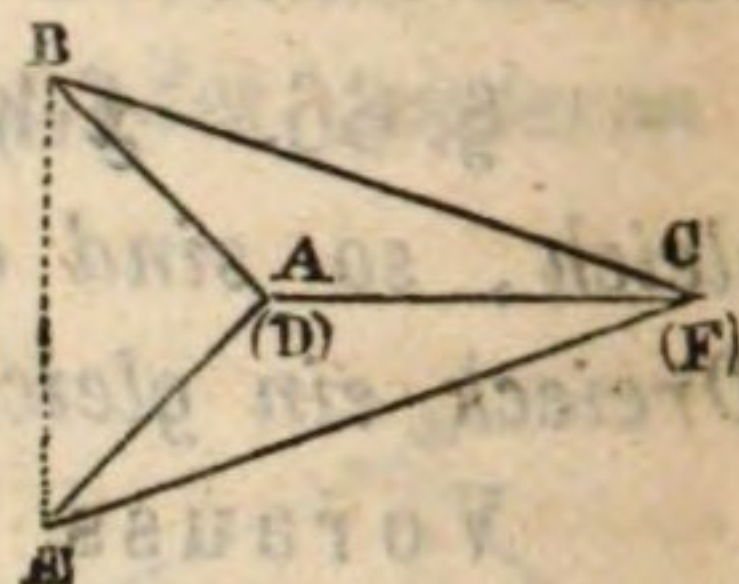
$BC = EF$.

Behaupt. $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.



Beweis. Man lege das eine Dreieck so an das andere, dass eine beliebige Winkelspitze (A) auf diejenige (D) im andern Dreieck falle, in welcher die beiden Seiten zusammenstossen, welche den in A zusammenstossenden gleich sind; ferner lasse man eine der an A stossenden Seiten AC auf die ihr gleiche DF , und beide Dreiecke auf entgegen-

gesetzte Seiten der gemeinschaftlichen Seite fallen. Dann folgt zunächst, dass auch C auf F fallen muss. Zieht man in dem entstandenen Viereck die noch fehlende Diagonale BE , so theilt diese das Viereck in zwei gleichschenklige Dreiecke, woraus die Gleichheit der Winkel an der gezogenen Diagonale, und mit Zuziehung von §. 10. a. die Gleichheit von $\angle ABC$ und $\angle DEF$ folgt. Die Congruenz der Dreiecke ABC und DEF ergibt sich nun aus §. 63.



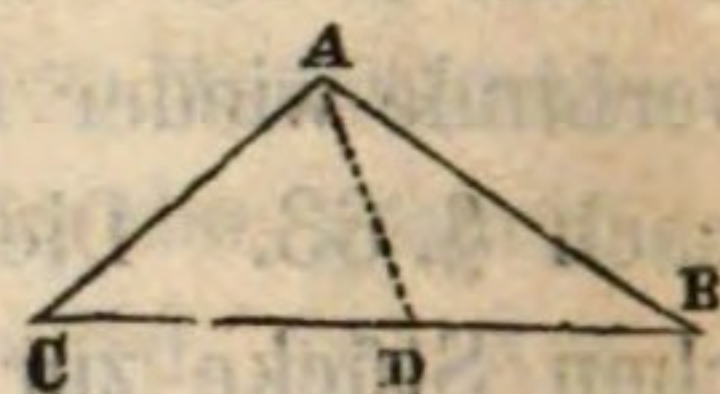
Anmerk. Worin ändert sich der Beweis, wenn die Diagonale EB ausserhalb des Vierecks fällt?

§. 68. *Lehrsatz. In jedem Dreiecke liegt der grösseren Seite der grössere Winkel gegenüber.*

Vorausss. $BC > AC$.

Behaupt. $\angle BAC > \angle ABC$.

Beweis. Man trage auf der grösseren Seite BC von dem Endpunkte (C) aus, welchen sie mit der kleineren gemein hat, die kleinere ($AC = CD$) ab, und verbinde den Abtragungspunkt (D) mit der gegenüberliegenden Winkelspitze (A); dann ist $\triangle CAD$ gleichschenkelig, und folglich $\angle CAD = \angle CDA$. Nun ist aber $\angle CDA > \angle ABD$ (nach §. 59b.) und deshalb auch $\angle CAD > \angle ABD$ (nach §. 14.), um so mehr aber $\angle BAC > \angle ABC$; w. z. b. w.



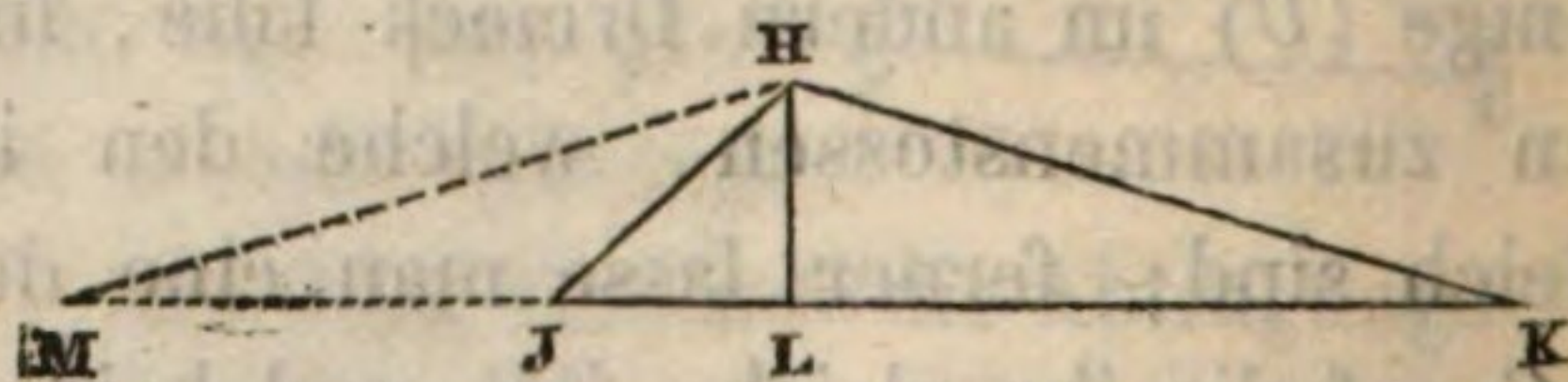
§. 69. *Lehrsatz. In jedem Dreiecke liegt dem grösseren Winkel die grössere Seite gegenüber. (S. vor. Fig)*

Vorausss. $\angle BAC > \angle ABC$.

Behaupt. $BC > AC$.

Beweis ist indirect zu führen und es ist mit Zuziehung der §§. 66. und 68. zu zeigen, dass die Annahme $BC =$ oder $< AC$ auf etwas der Voraussetzung Widersprechendes führt.

§. 69b. *Zusätze. 1) Im rechtwinkligen Dreiecke (HLK) ist die Hypotenuse (HK) immer grösser als jede der beiden Katheten (HL, LK) und somit ist von allen Linien, welche sich von einem Punkt (H) ausserhalb einer Linie (MK) an letztere ziehen lassen, das Loth (HL) die kürzeste,*



und es ist jede andere Linie (HJ, HM) um so grösser, je weiter ihr Durchschnittspunkt (J, M) vom Endpunkte (L) des Lothes absteht. Das Loth heisst der Abstand des Punktes von der Linie.

2) Zu jeder Linie (HK), die sich ausser dem Lothe (HL) von einem Punkte (H) ausserhalb einer Linie (MK) an diese ziehen lässt, giebt es eine (HM), aber auch nur eine, ihr gleiche auf der andern Seite des Lothes. Es werden nämlich diejenigen Linien auf entgegengesetzten Seiten des Lothes gleich sein, welche mit letzterm gleiche Winkel ($HML = HKL$) bilden.

Beweis. Ergiebt sich aus der Congruenz der erhaltenen Dreiecke, die sich (nach §. 64.) leicht erweisen lässt. Dass es auf jeder Seite nur eine Linie von bestimmter Länge giebt, folgt aus I.

3) Mit Hülfe von §. 69. lässt sich auch jetzt der Satz streng erweisen, welcher unter §. 25. als Grundsatz aufgestellt worden ist: „Die gerade Linie ist der kürzeste Weg zwischen zwei Punkten.“

Es sei ACD ein beliebiges Dreieck (s. Fig. zu §. 68.), man mache $BD = AD$ und ziehe AB , dann ist $\angle DAB = \angle DBA$ (§. 65.), folglich $\angle CAB > \angle ABC$, also auch (§. 69.) $CB > AC$ oder $CD + AD > AC$. Es ist also zunächst erwiesen, dass in jedem Dreiecke die Summe zweier Seiten grösser als die dritte ist. (Vgl. §. 57.) Es ergiebt sich aber hieraus ohne Schwierigkeit, dass auch jede beliebige gebrochene oder krumme Linie zwischen zwei Punkten grösser ist, als die geradlinige Verbindung derselben.

Anmerk. Will man den Grundsatz unter §. 25. nicht gelten lassen, so lasse man ihn dort aus, ebenso den §. 57., schalte §. 57. hier ein und lasse dann §. 25. folgen. Ausser in §. 57. ist nämlich von jenem Grundsatz nirgends eine Anwendung gemacht worden, und von §. 57. bisher überhaupt noch gar keine.

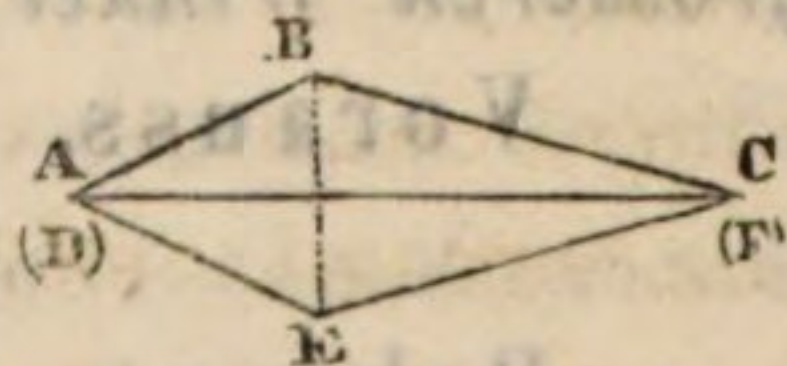
§. 70. IV. Congruenzsatz. Zwei Dreiecke sind congruent, wenn zwei Seiten und der Gegenwinkel der grösseren in beiden bezüglich gleich sind.

Voraus. $AB = DE$

$AC = DF$

$AC > AB$ und $DF > DE$

$\angle ABC = \angle DEF$.



Behaupt. $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.

Beweis. Man denke sich die beiden Dreiecke so aneinander gelegt, dass die Winkelspitze, in welcher die beiden gegebenen Seiten zusammenstossen, in dem einen Dreieck auf dieselbe Winkelspitze des andern falle (A auf D), dass ferner die grössere von den beiden gegebenen Seiten des einen Dreiecks auf die ihr gleiche im andern Dreieck zu liegen komme (AC auf DF), und dass endlich beide Dreiecke auf entgegengesetzte Seiten dieser gemeinschaftlichen Seite fallen, und verbinde dann noch die derselben gegenüberliegenden Winkelspitzen (B mit E).

Aus der Construction ergibt sich zunächst, dass auch F auf C fallen muss. Dann ist wegen $AB = DE$ auch $\angle ABC = \angle DEB$ (§. 65.), folglich, da $ABC = DEF$ nach der Voraussetzung, durch Subtraction auch $\angle CBE = \angle BEF$ und mithin $BC = EF$ (§. 66.), daher die Dreiecke congruent nach §. 67.

Anmerk. 1. Da der vierte Congruenzsatz fast nur allein in der obigen Fassung zur Anwendung kommt, so ist diese diesmal an Stelle der allgemeinen:

Zwei Dreiecke sind congruent, wenn zwei Seiten und der Gegenwinkel der einen bezüglich gleich, die Gegenwinkel der andern aber zugleich spitz oder stumpf sind. gesetzt worden.

Anmerk. 2. Aus der Congruenz der Figuren folgt jederzeit auch die Flächen-gleichheit. Zählt man diese mit unter die Bedingungen, so erhält man noch für die Dreiecke vier neue Congruenzsätze.

Zwei Dreiecke sind congruent:

- 1) wenn der Inhalt und zwei Winkel,
- 2) wenn der Inhalt, eine Seite und ein anliegender Winkel,
- 3) wenn der Inhalt, eine Seite und ihr Gegenwinkel,
- 4) wenn der Inhalt und zwei Seiten, deren eingeschlossener Winkel aber beiderseits entweder spitz oder stumpf sein muss, in beiden Dreiecken bezüglich gleich sind.

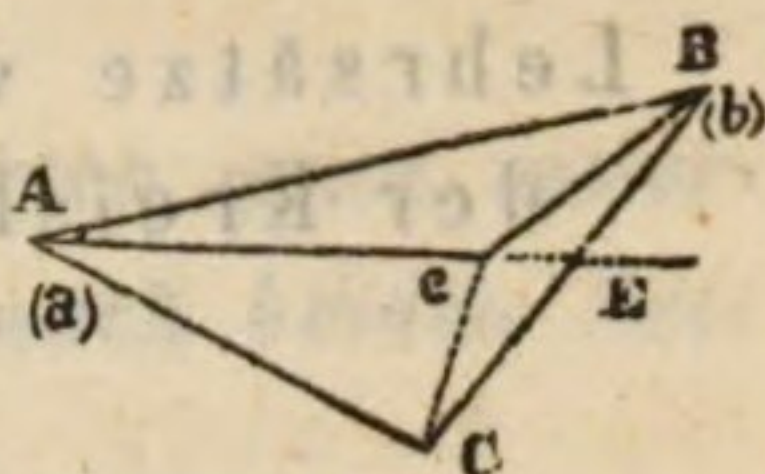
Wie lauten die Congruenzsätze für zwei rechtwinklige und für zwei gleichschenklige Dreiecke?

§. 71. *Lehrsatz.* Wenn in zwei Dreiecken zwei Seiten bezüglich gleich, die eingeschlossenen Winkel aber ungleich sind, so sind auch die dritten Seiten ungleich, und zwar liegt dem grösseren Winkel die grössere Seite gegenüber.

Vorausss. $\begin{cases} AB = ab, & AC = ac, \\ \angle BAC > \angle bac. \end{cases}$

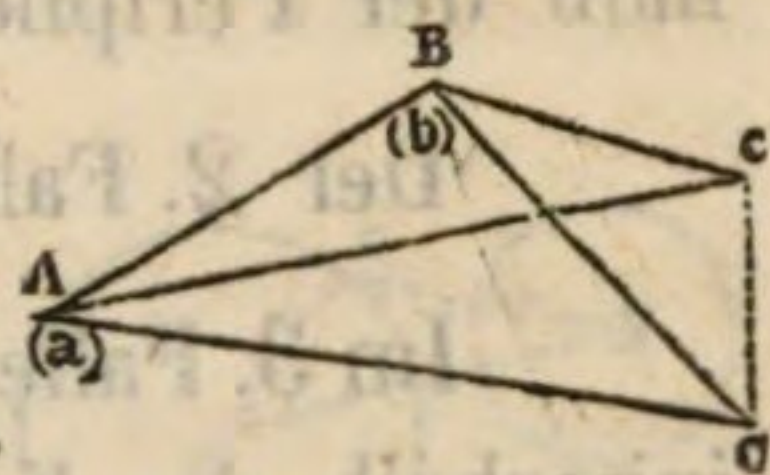
Behaupt. $BC > bc$.

Beweis. Man lege das eine Dreieck abc so auf das andre ABC , dass a auf A , ab auf AB und beide Dreiecke auf einerlei Seite der gemeinschaftlichen Seite zu liegen kommen; dann folgt, dass ac zwischen die Schenkel AB und AC (§. 32^b.) fallen muss. Der Punkt c kann aber drei verschiedene Lagen bekommen, er kann entweder innerhalb des Dreiecks ABC , oder ausserhalb desselben, oder auf BC fallen. Wäre das Letztere der Fall, so folgte unmittelbar, dass $BC > bc$.



Im ersten Falle verbinde man c mit C . Dann ist wegen $ac = AC$, $ACc = AcC$ und deshalb EcC und um so mehr noch BcC ein stumpfer Winkel, und also BC die grösste Seite im $\triangle BcC$, folglich $BC > bc$.

Fällt c ausserhalb des Dreiecks, so folgt der Satz durch ähnliche Betrachtungen.



§. 72. Lehrsatz. Wenn in zwei Dreiecken zwei Seiten bezüglich gleich, die dritten aber ungleich sind, so sind auch die der dritten Seite gegenüberliegenden Winkel ungleich, und zwar liegt der grössern Seite der grössere Winkel gegenüber.

Voraus. $\begin{cases} AB = ab \text{ (s. d. Fig. zu Anfang dieser Seite)} \\ AC = ac \\ BC > bc. \end{cases}$

Behaupt. $\angle BAC > \angle bac$.

Beweis. Ist indirect zu führen und zu zeigen, dass die Annahme, die Winkel seien gleich oder der grössern Seite liege der kleinere Winkel gegenüber, auf etwas der Annahme Widersprechendes führt.

Viertes Kapitel.

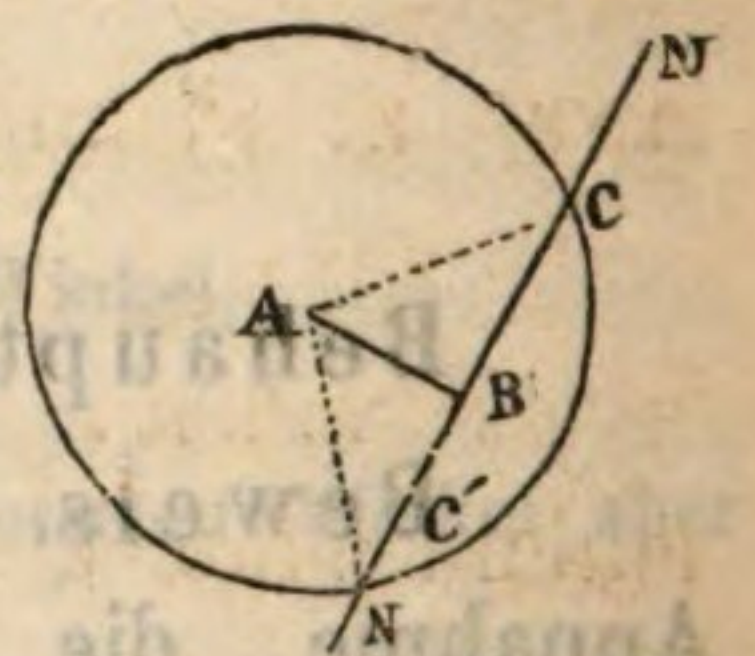
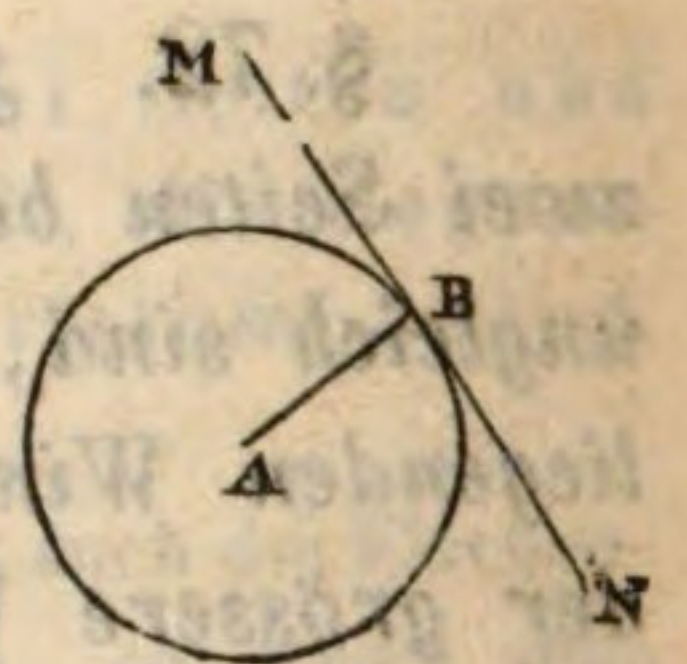
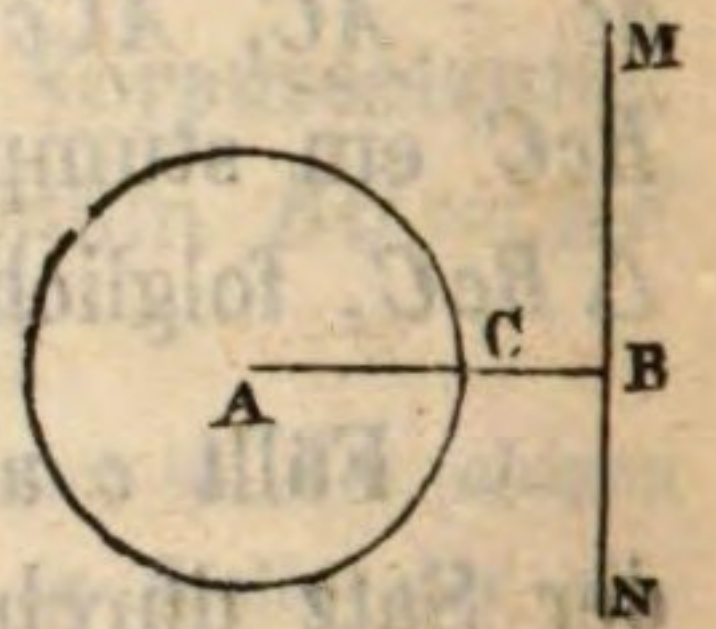
Lehrsätze vom Kreise, die Durchschnittspunkte der Kreislinie mit einer Geraden oder andern Kreislinie betreffend.

§. 73. *Lehrsatz.* Je nachdem der Abstand des Mittelpunktes eines Kreises von einer geraden Linie grösser, eben so gross oder kleiner als der Radius des Kreises ist, je nachdem hat der Kreis mit der Linie keinen, einen Punkt (in welchem Falle die Linie eine Berührende oder Tangente an den Kreis genannt wird) oder zwei Punkte gemein.

Beweis. Im 1. Falle ist $AB > AC$, so dass B (§. 28^b. 2.), um so mehr aber alle übrigen Punkte der Linie MN (§. 69^b. 1.) ausserhalb der Peripherie des Kreises liegen müssen.

Der 2. Fall folgt aus §. 69^b.

Im 3. Falle liegt der Fusspunkt B (§. 28^b. 2.) innerhalb des Kreises. Da nun der Kreis eine geschlossene Figur (§. 28. 1.) ist, so muss eine von einem innerhalb liegenden Punkte B ausgehende gerade Linie bei gehöriger Verlängerung den Umfang schneiden. Es geschehe dies in C . Da es nun aber (§. 69^b. 2.) auch auf der andern Seite des Lothes AB eine, aber auch nur eine Linie $AC' = AC$ giebt, so muss auch C' , aber auch nur noch dieser einzige Punkt ein Durchschnittspunkt des Kreises mit der geraden Linie sein.



§. 73^b. *Zusätze.* 1) Da diese genannten drei Lagen einer geraden Linie gegen die Kreislinie die nur überhaupt möglichen sind, so folgt unmittelbar, dass kein Theil der Kreislinie eine gerade Linie sein kann, weil dann der Kreisumfang mit einer geraden Linie unzählig viele Punkte gemein haben müsste, da ja auf einer geraden Linie sich unzählig viele Punkte annehmen lassen. Hieraus folgt denn nun, dass die Kreislinie eine krumme Linie ist.

2) Jede gerade Linie, welche im Endpunkte des Radius

eines Kreises auf ersterem senkrecht steht, ist eine Berührende an den Kreis.

3) Jede Sehne fällt in allen ihren Punkten ganz innerhalb der Kreislinie und ihre Verlängerungen nach beiden Seiten ganz ausserhalb.

§. 74. Erklärung. Die Verbindungslinie der Mittelpunkte zweier Kreise wird die Centrallinie dieser Kreise genannt.

§. 75. Lehrsätze. 1) Ist die Centrallinie zweier Kreise

a) grösser als die Summe der Radien, oder

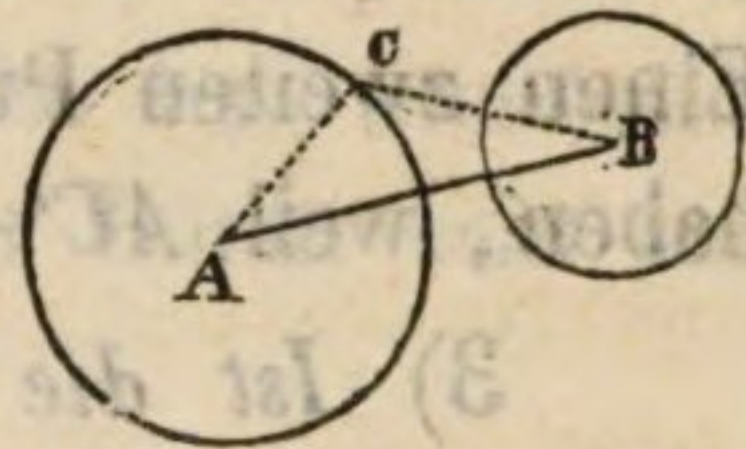
b) kleiner als die Differenz der Radien,

so schneiden sich beide Kreise gar nicht. Im ersteren Falle liegen beide Kreise ganz ausser einander, im zweiten liegt der eine innerhalb des andern.

a) Vorauss. $AB > r + r'$, wo r den Radius des Kreises aus A , und r' den des Kreises aus B bezeichnen möge.

Behaupt. Die Kreise haben keinen Punkt mit einander gemein.

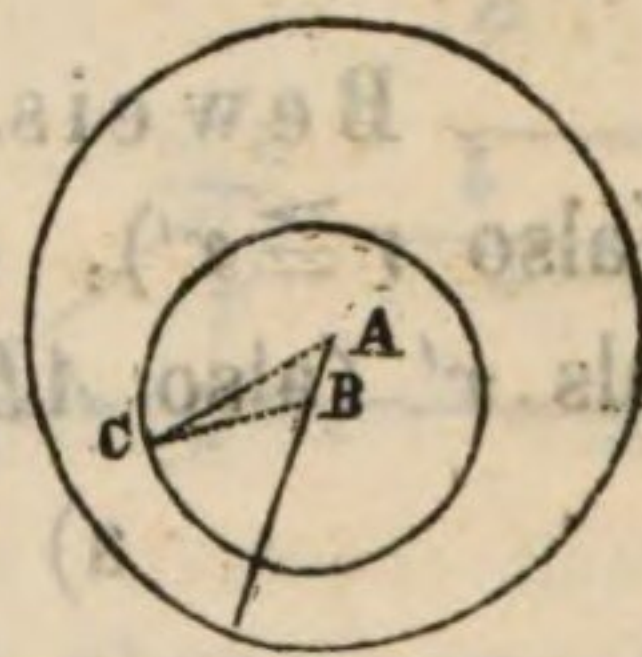
Beweis. Gesetzt beide Kreise hätten einen Punkt C gemein, so wäre, wenn man die Radien $AC = r$ und $BC = r'$ zöge, in dem Dreieck ACB , weil nach Voraussetzung $r + r' < AB$, auch $AC + BC < AB$. Dies ist aber wegen §. 57. 1. unmöglich.



b) Vorauss. $AB < r - r'$.

Behaupt. Die Kreise haben keinen Punkt gemein.

Beweis. Gesetzt beide Kreise hätten einen Punkt C gemein, so wäre, wenn man die Radien AC und BC zöge, wegen der Voraussetzung $AC - BC > AB$. Dies ist aber wegen §. 57. 2. unmöglich.



2) Ist die Centrallinie zweier Kreise

a) gleich der Summe ihrer Radien, oder

b) gleich der Differenz der Radien,

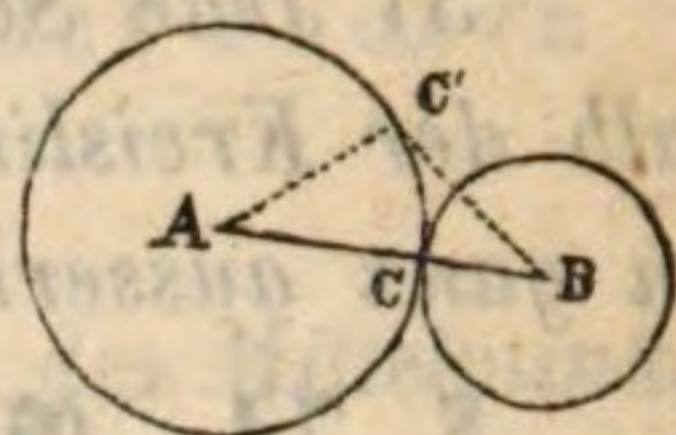
so haben beide Kreise nur einen Punkt miteinander gemein, d. h. sie berühren einander. Im ersten Falle berühren die

Kreise einander von Aussen, im zweiten Falle berührt der kleinere den grösseren von Innen.

a) Vorauss. $AB = r + r'$.

Behaupt. Die Kreise berühren einander.

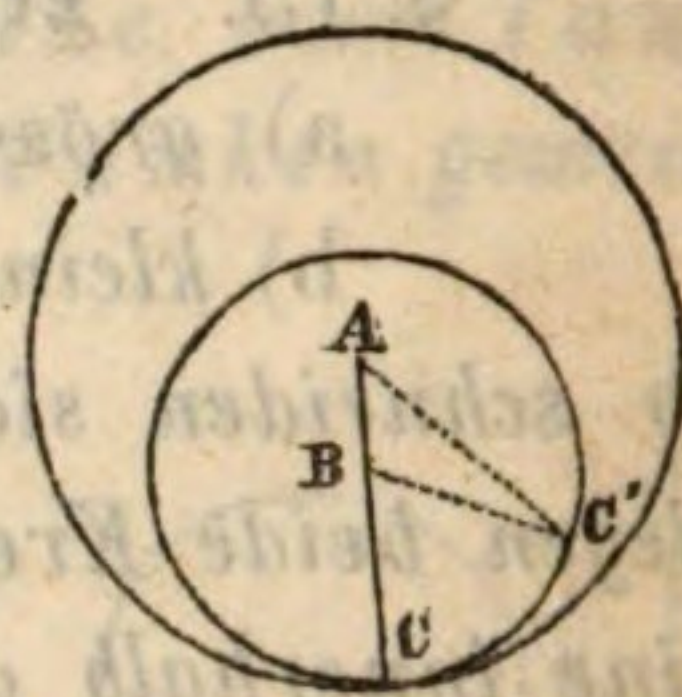
Beweis. Schneidet der eine Kreis die Centrallinie AB in C , so muss auch der andere Kreis durch C gehen, weil $AB =$ der Summe der Radien ist. Einen zweiten Punkt C' können sie aber nicht gemein haben, weil $AC + BC' = AB$ wegen §. 57. 1. ungereimt ist.



b) Vorauss. $AB = r - r'$.

Behaupt. Die Kreise berühren einander.

Beweis. Schneidet der Kreis aus A die verlängerte Centrallinie in C , so ist $AC = r$, und folglich $BC = r - AB$. Nach der Voraussetzung ist aber auch $r' = r - AB$, folglich ist $BC = r'$, d. h. der Kreis um B muss auch durch C gehen. Einen zweiten Punkt C' können aber beide Kreise nicht gemein haben, weil $AC' - BC' = AB$ wegen §. 57. 2. ungereimt ist.



3) Ist die Centrallinie zweier Kreise kleiner als die Summe der Radien, aber gleichzeitig noch grösser als die Differenz derselben, so schneiden die Kreise einander in zwei Punkten.

Voraus. $r - r' < AB < r + r'$.

Behaupt. Die Kreise schneiden einander in zwei Punkten.

Beweis. Nehmen wir an, r sei nicht kleiner als r' (also $r \geq r'$), so kann AB grösser, ebenso gross oder kleiner als r' (also $AB \geq r'$) sein. Es sei nun

a) $AB \geq r'$, so ist,

weil $AB < r + r'$,

auch $AB - r' < r$,

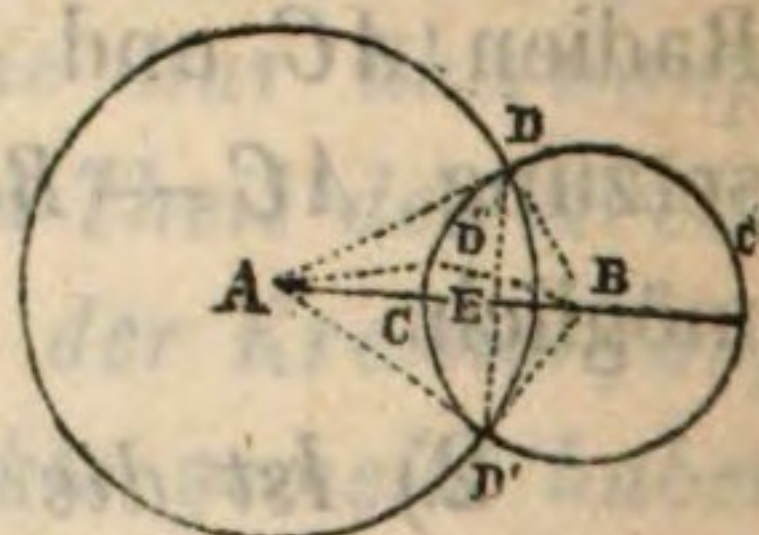
oder $AC < r$,

d. h. der Punkt C fällt innerhalb des aus A (mit r) beschriebenen Kreises. Nun ist aber auch

$AB > r - r'$,

also $AB + r' > r$,

oder $AC' > r$,



d. h. der Punkt C' fällt ausserhalb des aus A (mit r) beschriebenen Kreises.

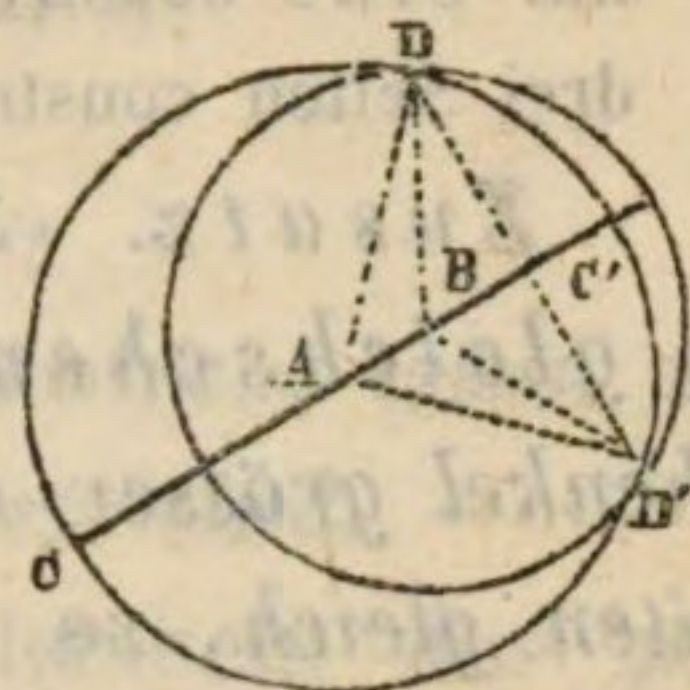
b) Ist $AB < r'$ und also um so mehr $AB < r$, so ist

$$\text{weil } r - r' < AB,$$

$$\text{auch } r - AB < r',$$

$$\text{oder } BC' < r',$$

d. h. C' fällt innerhalb des aus B (mit r') beschriebenen Kreises. Nun ist aber $AB + r > r > r'$ oder $BC > r'$, d. h. C fällt ausserhalb des aus B (mit r') beschriebenen Kreises.



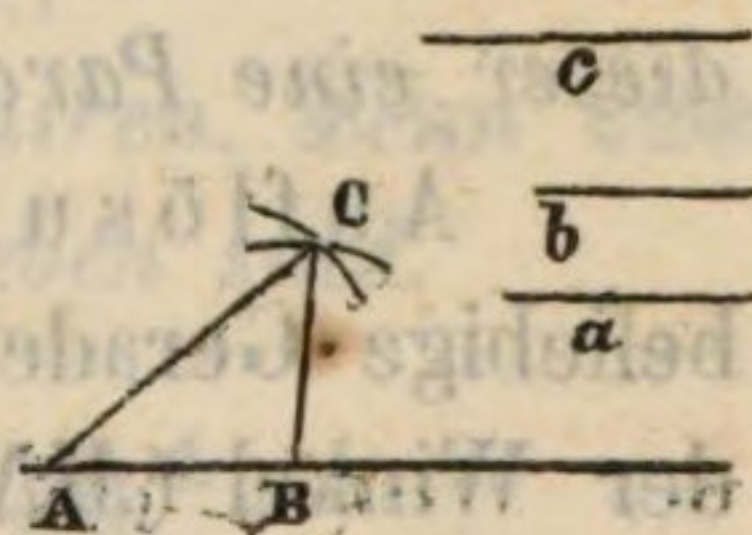
In beiden Fällen giebt es also in einem der Kreise zwei Punkte, von denen der eine innerhalb, der andere ausserhalb des andern liegt; hieraus folgt, dass die Kreise einander wenigstens in zwei Punkten D und D' schneiden müssen. Sie können einander aber ausserdem in keinem dritten Punkte schneiden, denn wäre D'' ein solcher dritter Durchschnittspunkt, so müsste $\triangle AD''B \cong \triangle ADB$ oder $\cong \triangle AD'B$ sein, was unmöglich ist, wenn D'' ein von D und D' verschiedener Punkt sein soll.

Fünftes Kapitel.

A u f g a b e n.

§. 76. Aufgabe. Ein Dreieck zu construiren, wenn dessen drei Seiten gegeben sind.

Auflösung. Man trage eine der gegebenen Seiten a auf einer geraden Linie $= AB$ ab, schlage aus dem einen Endpunkte B mit einer der beiden andern b einen Kreisbogen und ebenso aus A mit c und verbinde den Durchschnittspunkt C der Kreisbögen mit A und B , so ist das entstandene Dreieck ABC das verlangte.



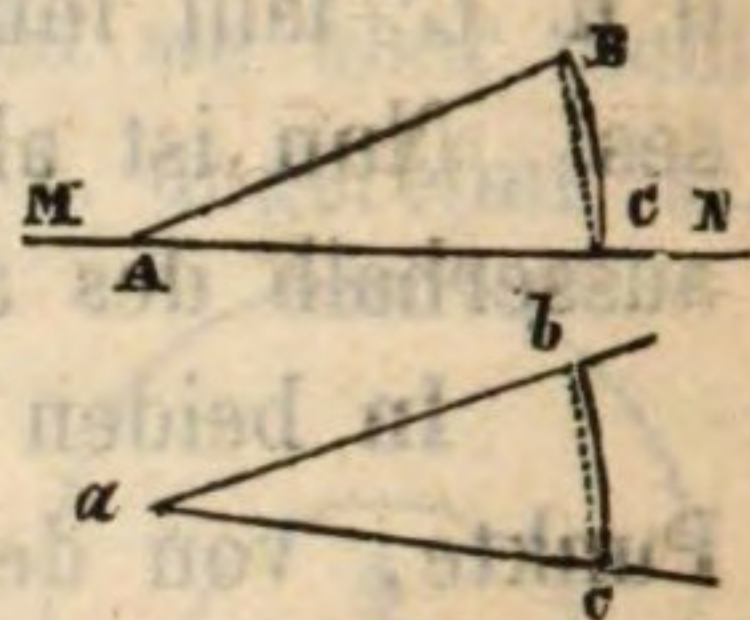
Beweis folgt aus der Construction.

Anmerk. Die Aufgabe ist nur möglich, wenn die Summe je zweier Seiten grösser, ihre Differenz aber kleiner als die dritte ist. Wäre z. B. $b + c = a$, so würde der Durchschnittspunkt beider Kreislinien in die Linie selbst fallen, also kein Dreieck gebildet werden. Wäre $b + c < a$ oder $b - c > a$, so kämen die Kreisbögen gar nicht zum Durchschnitt (§. 75. 3.). Ist

aber obige Bedingung erfüllt, so lässt sich jederzeit ein Dreieck, aber auch nur eins construiren. Letzteres folgt daraus, dass alle mit denselben drei Seiten construirten Dreiecke congruent sein müssen.

Zusatz. Sind zwei Seiten einander gleich, so entsteht ein gleichschenkliges Dreieck. Bei diesem muss jeder Schenkel grösser als die halbe Grundlinie sein. Sind alle drei Seiten gleich, so entsteht ein gleichseitiges Dreieck.

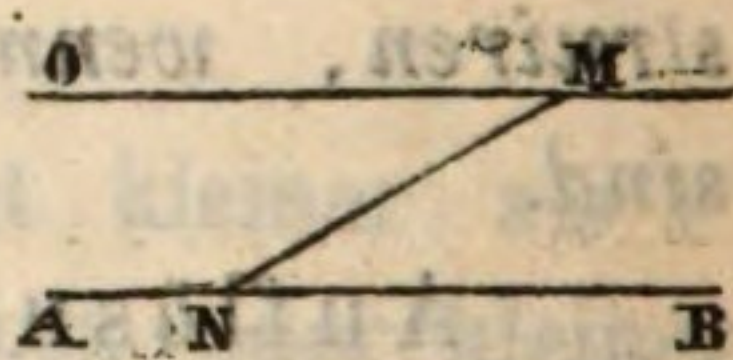
§. 77. Aufgabe. An eine gerade Linie (MN) in einem gegebenen Punkte (A) einen Winkel anzutragen.



Auflösung. Man schlage mit beliebiger Zirkelweite aus dem Scheitel (a) des gegebenen Winkels einen Kreisbogen und ebenso mit derselben Zirkelweite aus dem Punkte A nach der Seite hin, auf welcher der Winkel liegen soll, einen zweiten Kreisbogen bis an die gegebene Linie. Hierauf fasse man den Abstand der Durchschnittspunkte (b und c) des ersten Kreisbogens mit den Winkelschenkeln in den Zirkel und trage ihn vom Durchschnittspunkte (C) des zweiten Kreisbogens mit der geraden Linie auf ersterem bis B hin ab, ziehe AB , dann ist $BAC = bac$.

Beweis. Man ziehe BC und bc , dann folgt $BAC = bac$ aus der Congruenz der Dreiecke.

§. 78. Aufgabe. Durch einen gegebenen Punkt (M) ausserhalb einer Geraden (AB) mit dieser eine Parallele zu ziehen.



Auflösung. Man ziehe durch M eine beliebige Gerade MN an AB und trage einen der Winkel (MNB), welchen die beiden Linien mit einander einschliessen, auf der entgegengesetzten Seite von MN an diese im Punkte M an. Der zuletzt gezogene Schenkel MO ist die verlangte Parallele.

Beweis. Folgt aus §. 49. 2.

§. 79. Aufgabe. Von einem gegebenen Punkte ausserhalb einer Geraden an diese eine Linie zu ziehen, welche mit derselben einen gegebenen Winkel einschliesst.

Auflösung. Man trage auf der Seite, auf welcher der Punkt liegt, den gegebenen Winkel an einer beliebigen Stelle

(nach §. 77.) an und ziehe mit dem gezogenen Schenkel durch den gegebenen Punkt (nach §. 78.) eine Parallele.

Beweis. Folgt aus §. 48. 1.

Anmerk. Wie viele Lösungen lässt die Aufgabe zu?

§. 80. **Aufgabe.** Ein Dreieck zu construiren, wenn zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel gegeben sind.

Auflösung. Man trage auf den Schenkeln des gegebenen Winkels die gegebenen Seiten ab und verbinde die Abtragungspunkte durch eine gerade Linie.

Beweis. Folgt aus der Construction.

Anmerk. Eine Anwendung findet dieser Satz in der geodätischen Aufgabe: Die Entfernung zweier Punkte zu finden, wenn man von keinem zum andern, wohl aber von einem dritten Punkte nach jenen beiden sehen und messen kann. (Vergl. meine Schrift: „Grundzüge der Feldmesskunde“ 3. Aufl. S. 30.)

§. 81. **Aufgabe.** Ein Dreieck zu construiren, wenn eine Seite und die beiden anliegenden Winkel gegeben sind.

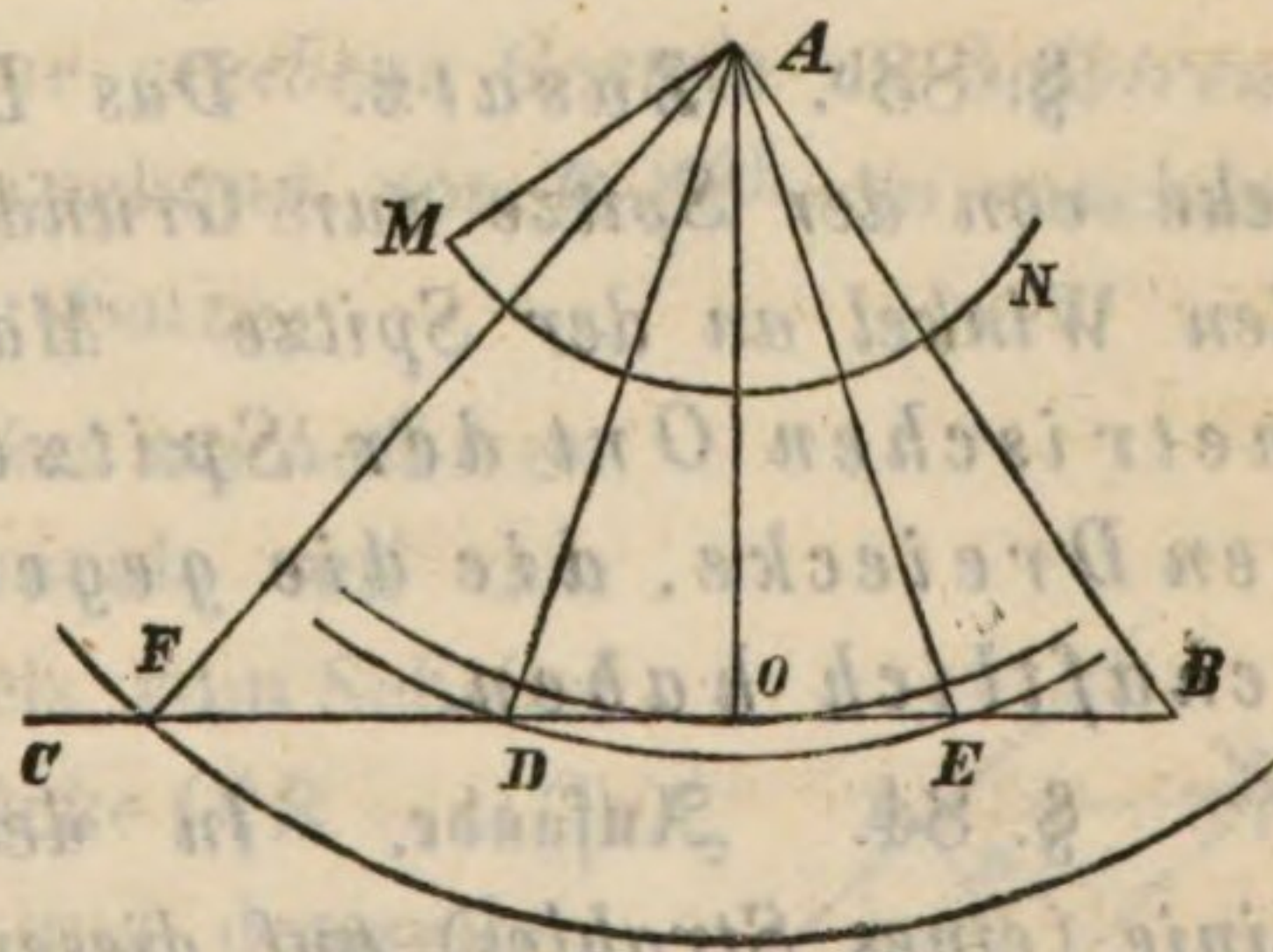
Auflösung. Man trage an den Endpunkten der gegebenen Seite bezüglich die beiden Winkel auf einerlei Seite an dieselbe an und verlängere die nicht gemeinschaftlichen Schenkel bis zum Durchschnitte.

Beweis. Folgt aus der Construction.

Anmerk. Eine Anwendung findet dieser Satz bei der geodätischen Aufgabe: Die Entfernung zweier Punkte A und B zu finden, wenn man von A nach B wohl sehen, aber nicht messen, von A aber nach einem dritten Punkte C sehen und messen, und von C nach B ebenfalls nur sehen kann. (Vergl. „Grundzüge der Feldmesskunde“ S. 9.)

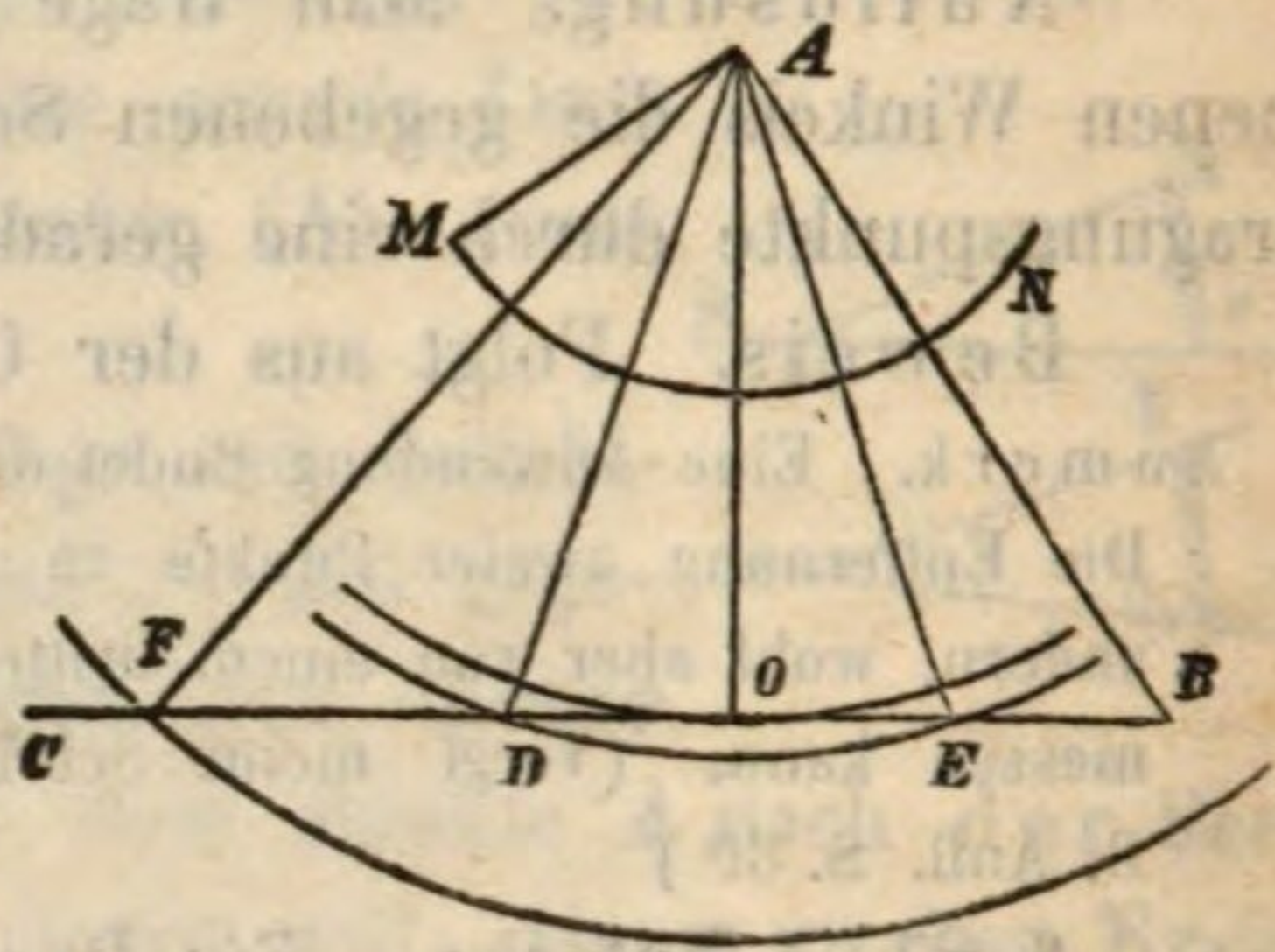
§. 82. **Aufgabe.** Ein Dreieck zu construiren, wenn zwei Seiten und der Gegenwinkel der grössern gegeben sind.

Auflösung. Man mache einen Schenkel AB des gegebenen Winkels ABC gleich der kleinern Seite, schlage aus dem Endpunkte A derselben mit der grössern ($= AF$) als Radius einen Kreisbogen bis zum Durchschnitte mit dem andern Schenkel BC in F , ziehe an diesen Durchschnittspunkt den Radius AF , so ist ABF das verlangte Dreieck.



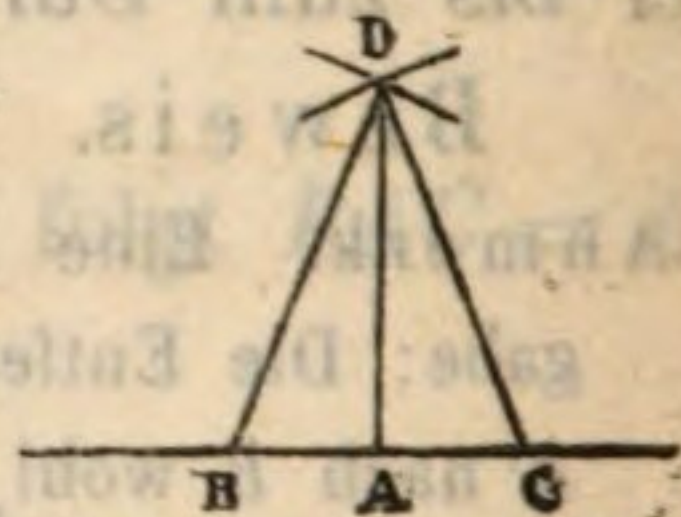
Beweis. Folgt aus der Construction. Dass es nur ein solches Dreieck geben kann, folgt daraus, dass $AF > AB$ ist, der mit AF beschriebene Kreis also den Schenkel BC selbst nur einmal schneiden kann. (§. 69^b.)

Anmerk. Sind zwei Seiten und der Gegenwinkel der kleineren Seite gegeben, so ist, wenn die kleinere Seite AM kleiner ist als das Loth AO , gar kein Dreieck möglich, weil in diesem Falle der mit AM beschriebene Kreisbogen MN die Linie BC (§. 73.) gar nicht schneidet. Ist die kleinere Seite gerade $= AO$, so giebt es (nach §. 73.) nur ein Dreieck (AOB), und wenn endlich die kleinere Seite (AD oder AE) grösser ist als AO , so schneidet der Kreisbogen DE die Linie BC (nach §. 73.) zweimal; es giebt also in diesem Falle zwei Dreiecke ADB und AEB , aber niemals mehr.



§. 83. Aufgabe. In einem Punkte einer gegebenen Geraden ein Loth zu errichten.

Auflösung. Man schneide vom gegebenen Punkte A aus auf beiden Seiten der Linie beliebige, aber gleiche Stücke AB und AC ab, und beschreibe über BC ein beliebiges gleichschenkliges Dreieck BCD . Die Verbindungslinie der Spitze D mit A ist das verlangte Loth.



Beweis. Es ist $\triangle ABD \cong \triangle ACD$ zu erweisen, woraus dann $\angle BAD = \angle DAC = R$ folgt.

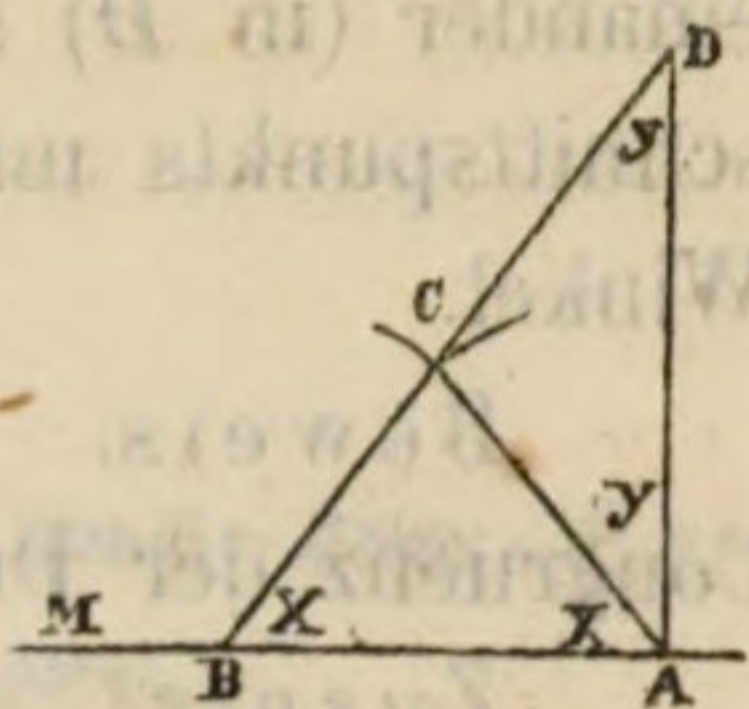
§. 83^b. Zusatz. Das Loth im gleichschenkligen Dreiecke von der Spitze zur Grundlinie halbirte diese sowohl, als den Winkel an der Spitze. Man nennt dieses Loth den geometrischen Ort der Spitzen aller gleichschenkligen Dreiecke, die die gegebene Grundlinie gemeinschaftlich haben.

§. 84. Aufgabe. In den Endpunkten einer geraden Linie (eines Strahles) auf dieser ein Loth zu errichten.

Auflösung. Sei AM die gegebene Gerade, in deren einem Endpunkte A das Loth errichtet werden soll, so schneide

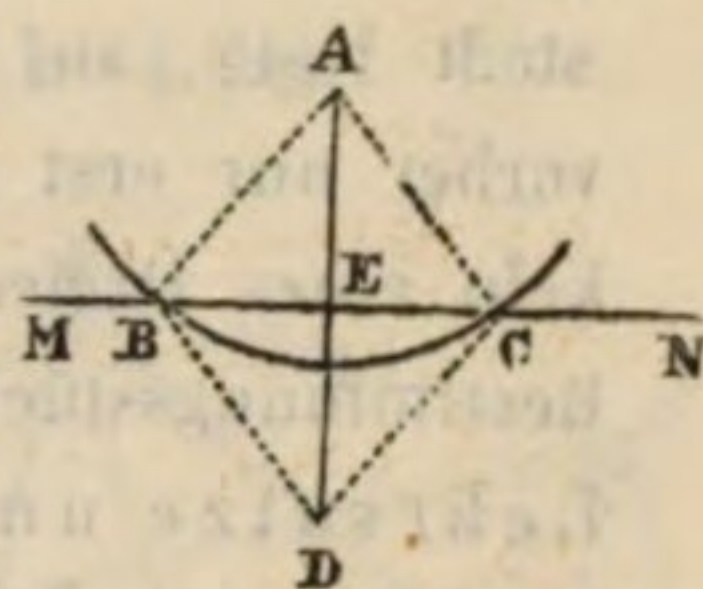
man von A aus ein beliebiges Stück AB ab, errichte darüber ein gleichschenkliges Dreieck ABC , verlängere BC über C hinaus, mache $CD = BC$ und ziehe DA , dann ist $DA \perp AM$.

Beweis. $2x + 2y = 2R$ (§. 60.), folglich $x + y = BAD = R$.



§. 85. Aufgabe. Von einem gegebenen Punkte (A) ausserhalb einer geraden Linie (MN) auf diese ein Loth zu fallen.

Auflösung. Man schlage aus A mit einer Zirkelweite, welche grösser als der Abstand des Punkts von der Linie (§. 73.), im Uebrigen aber beliebig ist, einen Kreisbogen, welcher die Gerade MN (in B und C) schneidet und aus B und C mit derselben (oder auch mit einer grössern) Zirkelweite auf entgegengesetzter Seite mit dem gegebenen Punkte A in Bezug auf die Gerade zwei Kreisbögen, welche einander (in D) schneiden, dann ist die Verbindungslinie $AD \perp BC$.



Beweis. Man ziehe AB , AC , BD und CD und beweise, dass $\triangle ABD \cong \triangle ACD$, woraus sich dann die nöthigen Bedingungen zum Beweise, dass auch $\triangle ABE \cong \triangle ACE$ ist, ergeben, aus welcher Congruenz sich dann $AEB = AEC = R$ folgern lässt.

Anmerk. Von welcher frühern Aufgabe ist diese ein specieller Fall? Wie würde die analoge Lösung lauten? Gelangt man nicht auch zu einer richtigen Lösung, wenn D mit A auf einerlei Seite von MN liegt?

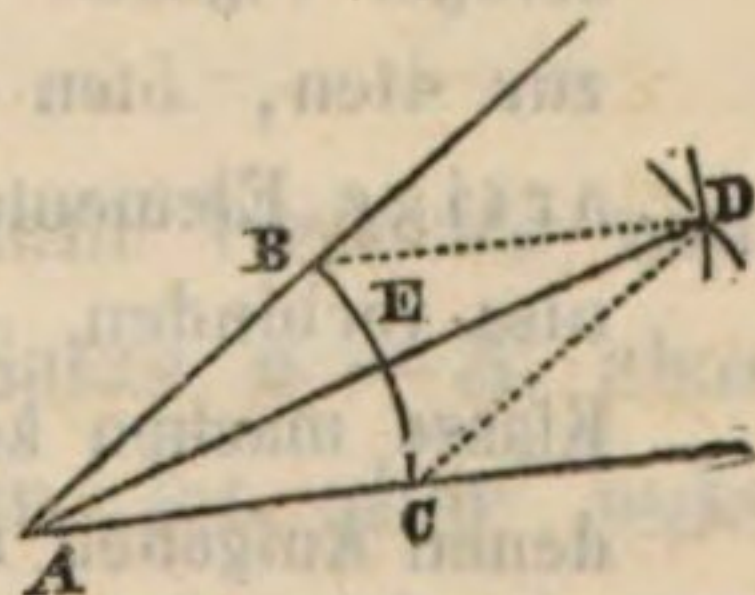
§. 85b. Zusatz. Von einem Punkte ausserhalb einer Geraden lässt sich auf diese nur ein einziges Perpendikel fallen.

§. 86. Aufgaben. 1) Eine gegebene Gerade zu halbiren.

Auflösung. Ist mit Zuziehung von §. 83b. zu machen. Der Beweis folgt aus demselben Satze.

2) Einen gegebenen Winkel zu halbiren.

Auflösung. Man schneide auf den Schenkeln des gegebenen Winkels vom Scheitel A aus beliebige aber gleiche Stücke ($AB = AC$) ab und beschreibe mit einem und demselben Radius aus den Endpunkten (B und C) dieser abgetragenen Stücke zwei Kreisbögen, welche



einander (in D) schneiden. Die Verbindungslinie dieses Durchschnittspunkts mit dem Scheitel des Winkels (AD) halbt den Winkel.

Beweis. Man ziehe BD und CD , dann folgt aus der Congruenz der Dreiecke ABD und ACD , dass $\angle BAD = \angle CAD$.

Zusatz. *Durch fortgesetztes Halbiren kann ein gegebener Winkel in 4, 8, 16 u. s. w. gleiche Theile getheilt werden.*

Anmerk. 1. Neben diesen finden sich anderweitige hierher gehörige Aufgaben in meiner Formenlehre und Aufgabensammlung, Halberstadt 1842. auf Seite 6 bis 29, wo bei den Aufgaben über das Dreieck vorher nur erst gezeigt werden muss, dass ausser den Seiten und Winkeln eines Dreiecks auch die Höhen, Halbierungslinien der Winkel u. s. w. Bestimmungsstücke desselben sind. Ausserdem sehe man Geometrische Lehrsätze und Aufgaben etc. Mit Beweisen und Auflösungen herausgegeben von Dr. Wiegand. Halle 1846. 1. Band. 1. Abschnitt. Die interessantesten Constructionsaufgaben über Dreiecke enthält die Schrift: Geometrische Aufgaben von Miles Bland. Aus dem Englischen übersetzt von Dr. Wiegand. Halle 1850. (S. den Anhang zu diesem Cursus, namentlich aber den zum zweiten Cursus.)

Anmerk. 2. Auf eine höchst einfache und leichte Art kann man sich für eine bestimmte Anzahl von Bestimmungsstücken alle möglichen Aufgaben die Construction der Dreiecke betreffend aufstellen, wenn man aus diesen Bestimmungsstücken als Elementen die Combinationen ohne Wiederholungen zur 3ten Klasse bildet. Streicht man hiervon diejenigen Complexionen, welche blos Winkel enthalten, sowie auch diejenigen, in welchen ein Element durch das andere, oder durch die beiden andern zugleich mit gegeben ist, so stellen die übrigen ebensoviel Aufgaben dar, von denen allerdings noch mehr bei der Einkleidung in Worte zusammenfallen. Da die Schüler die Bildung genannter Combinationen sehr leicht begreifen und mit vielem Vergnügen ausführen, so ist dies für dieselben eine ebenso angenehme, als fruchtbringende Beschäftigung, indem das Einkleiden der Complexionen in Worte eine vortreffliche Uebung des Nachdenkens ist. In gleicher Weise, wie beim Dreieck, lassen sich die Aufgaben für die Parallelogramme, Trapeze, allgemeinen Vierecke etc. bilden. Später lassen sich die Flächeninhalte dieser Figuren, die Radien der eingeschriebenen und umschriebenen Kreise beim Dreieck und bei den durch Diagonalen entstandenen Dreiecken mehrseitiger Figuren herziehen; ferner lassen sich aus den Combinationen zur 4ten, 5ten etc. nten Klasse in jeder Complexion je zwei gleichartige Elemente zur Summe, zur Differenz, zum Rechteck oder Verhältniss verbinden. Wie man es in ähnlicher Weise bei der 5ten, 6ten, nten Klasse machen kann, ist nun wohl leicht zu ersehen. Dass diese gefundenen Aufgaben auf dem Standpunkte des Schülers nicht sämmtlich lösbar sind, thut hier weiter nichts zur Sache.

Dritter Abschnitt.

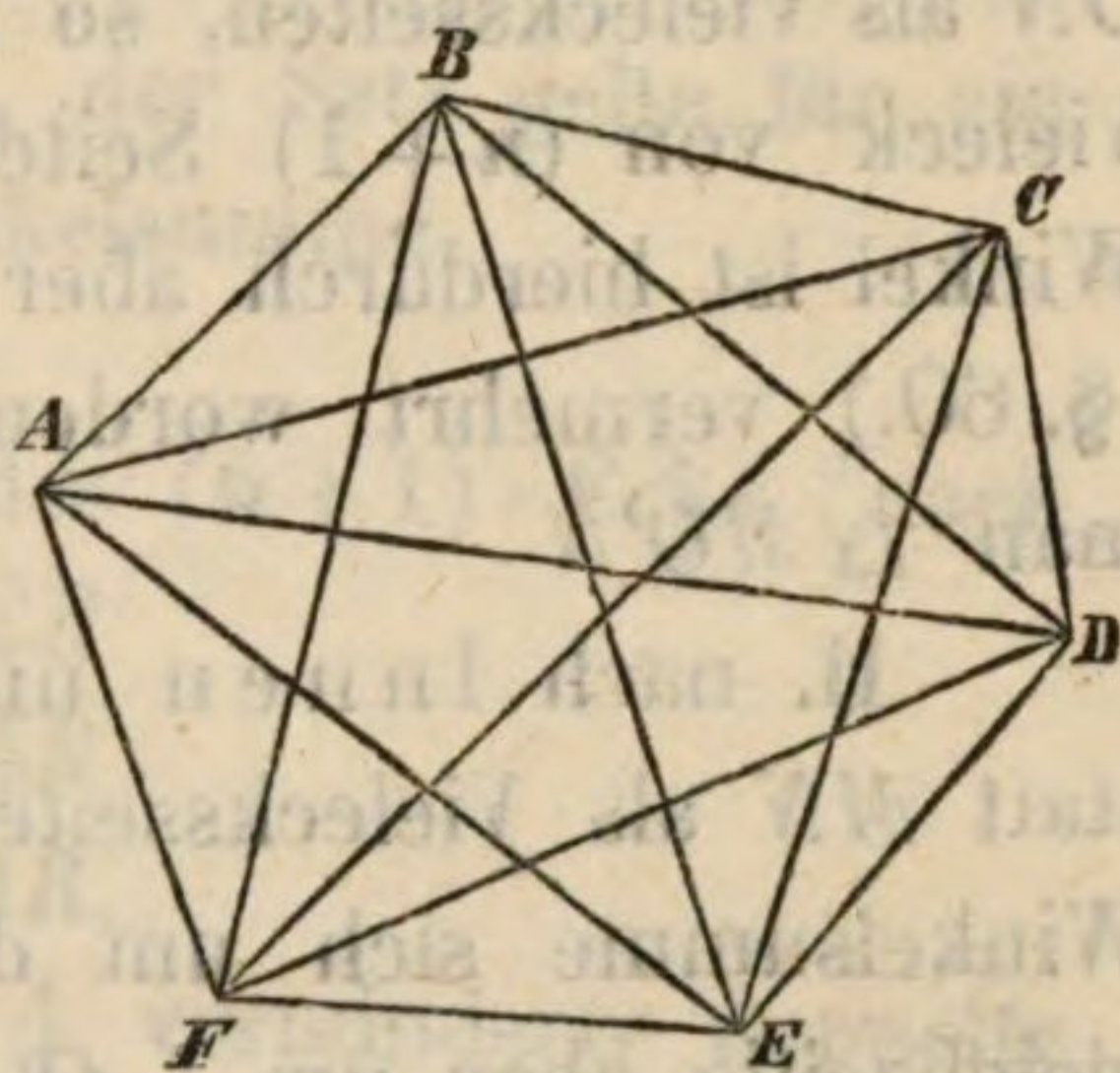
Von den Vielecken im Allgemeinen und den Parallelogrammen im Besondern.

Erstes Kapitel.

Allgemeine Lehrsätze von Vielecken.

§. 87. **Erklärung.** Eine gerade Linie, welche, ohne eine Seite zu sein, zwei Winkelspitzen eines Vielecks verbindet, heisst eine *Diagonale*.

So sind in nebenstehender Figur AC , AD , AE , BD , BE , BF u. s. w. Diagonalen.



§. 88. **Lehrsatz.** In jedem Vielecke ist die Anzahl aller Diagonalen, welche sich aus einer Winkelspitze ziehen lassen, gleich der um drei verminderten Seitenzahl.

Beweis. Nach dem Punkte, von welchem aus die Diagonalen gezogen werden sollen, lässt sich natürlich keine ziehen, ebensowenig aber auch nach den beiden mit dem erstern durch Seiten verbundenen Winkelspitzen. Ist also die Anzahl der Seiten und folglich auch der Endpunkte $= n$, so bleiben doch nur noch $n - 3$ Punkte übrig, nach denen sich Diagonalen ziehen lassen. Die Anzahl der letztern ist also selbst $= n - 3$.

Zusatz. Im Dreieck lässt sich keine Diagonale ziehen.

§. 88b. **Zusatz.** Die Anzahl der möglichen Diagonalen, welche sich in einem Vielecke ziehen lassen, ist gleich dem halben Producte aus der ganzen Seitenzahl in die um drei verminderte.

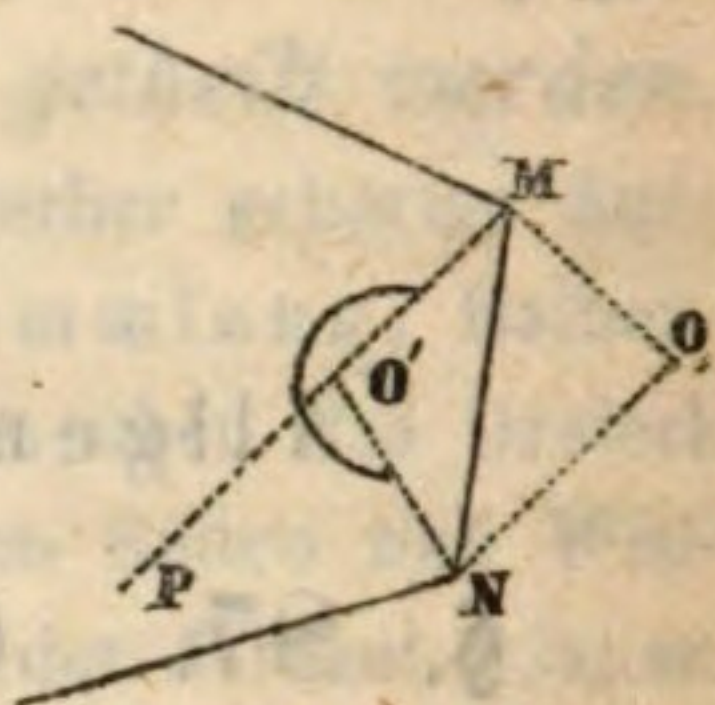
Beweis. Es lassen sich nämlich in einem Vielecke von n Seiten aus jeder Winkelspitze nach vorigem Satze $n - 3$, also im Ganzen $n(n - 3)$ Diagonalen ziehen. Nun ist aber jede derselben zweimal gezählt, deshalb ist das Product noch durch

2 zu dividiren, und es ist somit die Anzahl aller möglichen Diagonalen $= \frac{n(n-3)}{2}$.

§. 89. *Lehrsatz.* In jedem Vielecke wächst die Summe der Winkel um zwei Rechte ($2R$), wenn die Anzahl der Seiten um eine zunimmt.

Beweis. Es sei MN eine Seite eines Vielecks von n Seiten; man construiere

I. nach Aussen darüber $\triangle MON$ und betrachte nun statt MN die Seiten MO und ON als Vielecksseiten, so hat man offenbar ein Vieleck von $(n+1)$ Seiten. Die Summe der Winkel ist hierdurch aber um $\angle NMO + \angle MON + \angle ONM = 2R$ (§. 60.) vermehrt worden, was behauptet wurde. Construiert man $\triangle MO'N$



II. nach Innen und nimmt entsprechend MO' und $O'N$ statt MN als Vielecksseiten, so hat man ein $(n+1)$ eck, dessen Winkelsumme sich um den convexen Winkel $MO'N$ vermehrt, gleichzeitig aber um $\angle O'MN + \angle O'NM$ vermindert hat. Verlängert man MO' bis P , so ist $\angle PO'N = \angle O'NM + \angle O'MN$ (§. 59.) und ist deshalb die Winkelsumme noch um den gestreckten Winkel $MO'P$ grösser als die des n ecks, was ebenfalls der Behauptung entspricht. Vielecke mit convexen Winkeln nennt man Vielecke mit einspringenden Winkeln. (Vergl. §. 54^b. 2.)

§. 89^b. *Lehrsatz.* Die Summe aller innern Winkel eines Vielecks ist gleich so viel Rechten, als die um 4 verminderte doppelte Seitenzahl angiebt.

Voraussetz. Ein Vieleck hat n Seiten.

Behaupt. Die Summe der innern Winkel desselben ist

$$S = (2n-4)R \text{ oder}$$

$$S = 2nR - 4R.$$

Beweis 1. Wenn man von einem beliebigen Punkt P innerhalb des Polygons gerade Linien nach den Ecken zieht, so erhält man ebensoviel Dreiecke als die Figur Seiten hat d. i. n Dreiecke. Diese haben offenbar $2nR$ als Winkelsumme; zieht man davon die um den Punkt P liegenden $4R$ ab, so erhält man für die Summe der Polygonwinkel $2nR - 4R$.

Beweis 2. Wir wissen bereits, dass der Satz vom Dreieck gilt, denn bei diesem ist (§. 60.) die Summe aller Winkel $(2 \cdot 3 - 4) \text{ Rechte} = 2 \text{ Rechte}$.

Könnten wir nun erweisen, dass, wenn der Satz für irgend ein Vieleck gilt, er auch für dasjenige gelten müsse, welches eine Seite mehr hat; oder, was dasselbe ist, könnten wir zeigen, dass, wenn der Satz vom n -Eck gilt, er auch vom $(n+1)$ -Eck gelten müsse; so würden wir schliessen dürfen, dass der Satz, weil er vom Dreiecke gilt, auch vom Vierecke, und weil von diesem, auch vom Fünfecke u. s. f., allgemein von jedem Vielecke gelten müsse. Nehmen wir deshalb an, der Satz gelte für ein beliebiges n -Eck und es sei dessen Winkelsumme

$$S = 2nR - 4R,$$

so wird man für die Winkelsumme des $(n+1)$ -Ecks (nach §. 89.) haben

$$S = 2nR - 4R + 2R$$

$$= 2nR + 2R - 4R$$

$$= 2(n+1)R - 4R,$$

also auch so viel Rechte, als die um 4 verminderte doppelte Seitenzahl angiebt. Nun ist aber der Satz für $n = 3$ richtig, folglich auch für $n+1 = 4$, wovon sich weiter auf die Richtigkeit beim Fünfecke, Sechsecke etc. und allgemein bei jedem Vielecke schliessen lässt, so dass der Satz allgemein gilt.

Anmerk. Beweis 1 gilt nur für Polygone mit lauter concaven Winkeln, während Beweis 2 vollkommen allgemein ist. Freilich macht der letztere dem Anfänger grössere Schwierigkeiten, wir haben ihn aber schon um deswillen nicht übergehen mögen, weil die Schüler nicht früh genug mit der so überaus fruchtbaren Schlussmethode von n auf $n+1$ bekannt gemacht werden können.

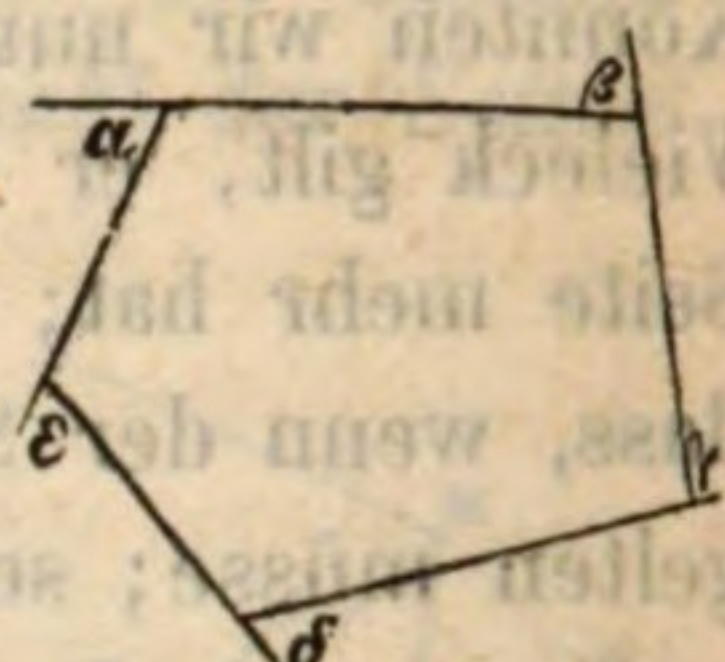
§. 89c. *Zusätze.* 1) *Ein jedes n -Eck kann höchstens $n-3$ convexe Winkel haben.*

Beweis. Hätte es z. B. $n-2$ convexe Winkel, so wäre die Summe dieser Winkel schon grösser als $2(n-2)R$ oder $(2n-4)R$, weil jeder convexe Winkel $> 2R$ ist.

2) *Im regulären Vieleck von n Seiten ist ein Winkel $= \frac{2n-4}{n}R$, d. h. er ist gleich so viel Rechten, als die Zahl angiebt, welche man erhält, wenn man von der doppelten Seitenzahl die Zahl 4 subtrahirt und die erhaltene Differenz durch die Anzahl der Seiten dividirt.*

3) Jedes Vieleck kann durch Diagonalen, welche nur in dem Umfange des Vielecks zusammenstossen, in nicht mehr und nicht weniger als $(n-2)$ Dreiecke zerlegt werden.

4) Die Summe aller Aussenwinkel, welche entstehen, wenn alle Seiten eines Vielecks mit concaven Winkeln über einen ihrer Endpunkte, aber nicht zwei Seiten über denselben Endpunkt verlängert werden, ist $= 4R$.

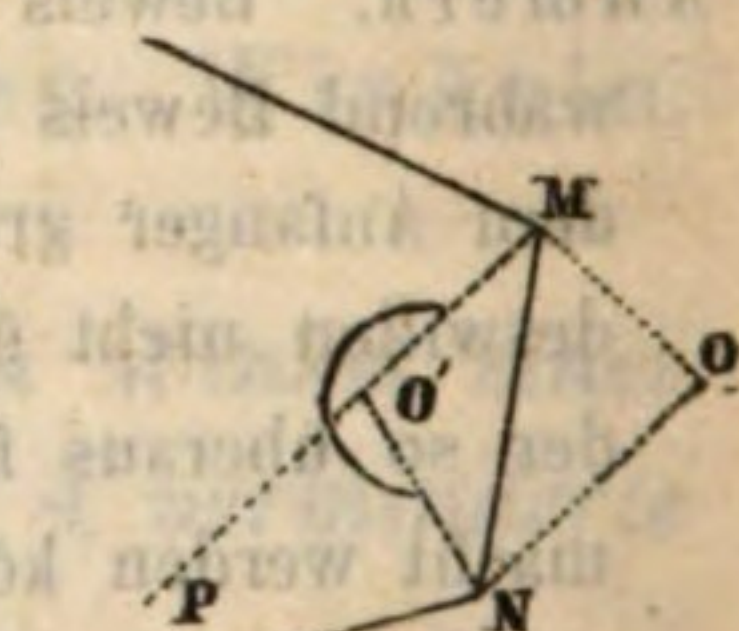


$$\alpha + \beta + \gamma + \delta + \epsilon = 4R.$$

Anmerk. Bei einem Vielecke der bezeichneten Art sind die Aussenwinkel Nebenwinkel (Supplemente) der innern, bei convexen (einspringenden) Winkeln ist dies jedoch nicht durchweg der Fall. Wenn wir jedoch den Begriff des Supplements eines Winkels ganz allgemein fassen und darunter einen Winkel verstehen, welcher zum andern addirt werden muss, wenn man $2R$ erhalten will, so ersieht man, dass das Supplement eines convexen Winkels ein negativ (subtractiv) zu nehmender Winkel sein muss. In diesem Sinne kann man den ganz allgemeinen Satz aufstellen: „Die Summe der Supplemente aller Winkel eines beliebigen Vielecks ist gleich vier Rechten“

§. 89d. **Lehrsatz.** Jedes n -Eck enthält im Allgemeinen $(2n-3)$ Bestimmungsstücke, d. h. es sind zur Construction soviel von einander unabhängige Stücke nöthig, aber auch hinreichend.

Beweis. Für das Dreieck ist der Satz bereits bewiesen, da dieses $3 = 2 \times 3 - 3$ Bestimmungsstücke enthält. Es ist nach der Schlussmethode von n auf $n+1$ (vergl. §. 89b.) nur noch zu zeigen, dass, wenn der Satz für ein n -Eck gilt, er auch für ein $(n+1)$ -Eck gelten müsse. Gesetzt es sei MN eine Seite des n -Ecks und es werde zur Bildung eines $(n+1)$ -Ecks das Dreieck MON resp. $MO'N$ angesetzt, so ist von diesem Dreieck bereits die Seite MN gegeben, mithin sind zur Construction derselben nur noch zwei Stücke nöthig; mithin zu der des $(n+1)$ -Ecks $(2n-3+2)$ Stücke $= [2(n+1)-3]$ Stücke, was nur noch zu zeigen war.



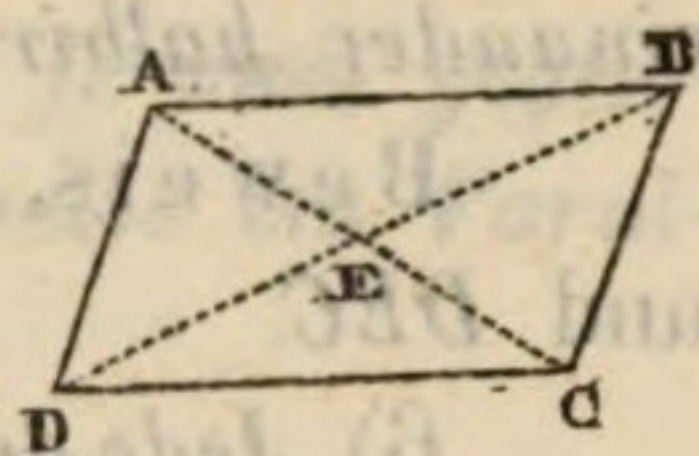
Zusatz. Zwei n -Ecke sind congruent, wenn $(2n-3)$ von einander unabhängige, und in derselben Ordnung aufeinander folgende Stücke einander gleich sind.

Zweites Kapitel.

Von den Parallelogrammen.

§. 90. **Erklärung.** Ein Viereck, in welchem die einander gegenüberliegenden Seiten parallel sind, heisst ein Parallelogramm.

Man bezeichnet ein Parallelogramm durch das Zeichen $\parallel$ gr, hinter welches man die vier Buchstaben, welche an den Winkelspitzen stehen, oder nur zwei gegenüberstehende Buchstaben setzt; z. B. $\parallel$ gr $ABCD$ oder $\parallel$ gr AC , auch $\parallel$ gr BD .



§. 90^b. **Zusätze.** 1) Die Summe zweier Winkel im $\parallel$ gr, welche an einer und derselben Seite liegen, ist $= 2R$.

2) Je zwei gegenüberstehende Winkel im $\parallel$ gr sind einander gleich.

3) Ist im $\parallel$ gr ein Winkel ein R , so sind alle übrigen ebenfalls rechte; ist ein Winkel ein schiefer, so sind alle übrigen ebenfalls schiefe.

Ein $\parallel$ gr der erstern Art heisst ein rechtwinkliges, eins der zweiten ein schiefwinkliges.

§. 91. **Lehrsatz.** In jedem Parallelogramme sind je zwei gegenüberstehende Seiten einander gleich.

Voraus. $AB \parallel CD$

$AD \parallel BC$.

Behaupt. $AB = CD$

$AD = BC$.

Beweis. Man ziehe eine Diagonale AC und beweise die Congruenz der entstandenen Dreiecke ABC und ADC .

§. 91^b. **Zusätze.** 1) Parallelen zwischen Parallelen sind einander gleich.

2) Alle von irgend welchen Punkten einer Linie auf eine andere ihr parallele gefällten Lothe sind einander gleich (§. 49^b).

Ein von einem Punkte einer Parallelen auf die andre gefälltes Loth heisst deshalb der Abstand beider Parallelen.

3) Jede Diagonale theilt das Parallelogramm in zwei congruente Dreiecke. Hieraus folgt, dass ein Parallelogramm bestimmt ist und folglich construirt werden kann, wenn eins dieser Dreiecke gegeben ist.

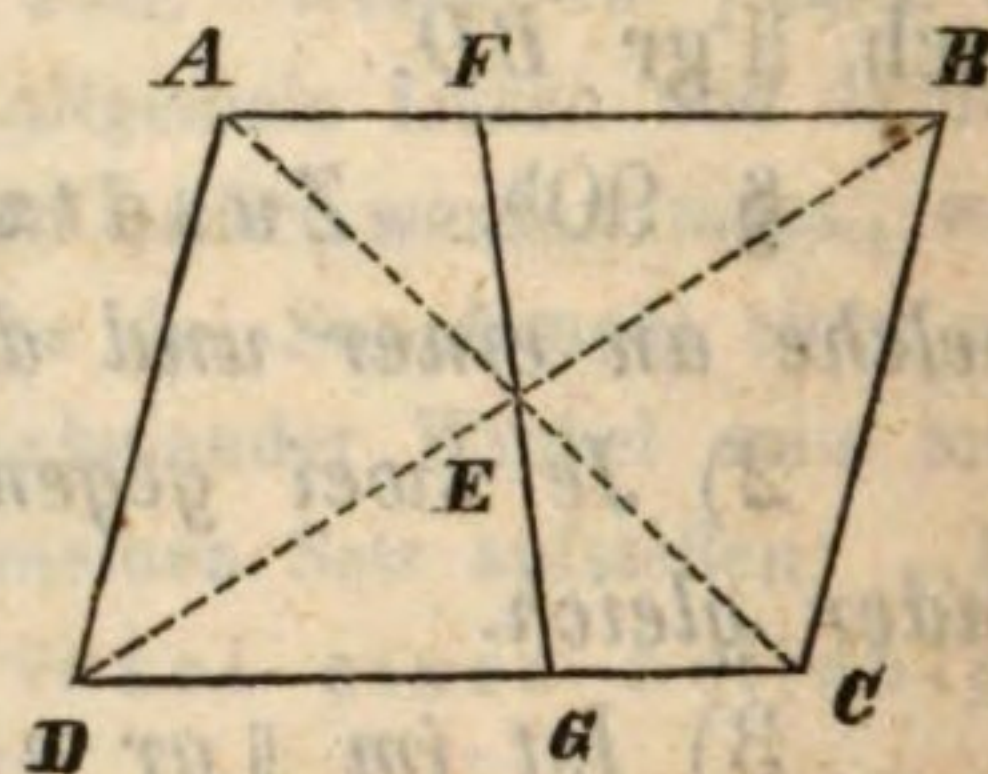
4) Sind in einem Parallelogramme zwei anstossende Seiten einander gleich, so sind alle vier einander gleich.

5) Die Diagonalen eines Parallelogramms halbiren einander, und umgekehrt: wenn in einem Vierecke die Diagonalen einander halbiren, so ist es ein Parallelogramm.

Beweis. Folgt aus der Congruenz der Dreiecke ABE und DEC .

6) Jede durch den Durchschnittspunkt beider Diagonalen gehende Linie halbirt das Parallelogramm.

7) Da (Zus. 3.) ein Parallelogramm bestimmt ist, wenn eins der durch eine Diagonale entstandenen Dreiecke ABC gegeben ist, und dieses wiederum durch jedes der durch die beiden Diagonalen gebildeten vier Dreiecke, z. B. durch ABE bestimmt ist, indem AB und BAC in beiden gemein und durch AE auch AC gegeben ist, so ist das Parallelogramm auch durch ein Dreieck der letztern Art vollkommen bestimmt.



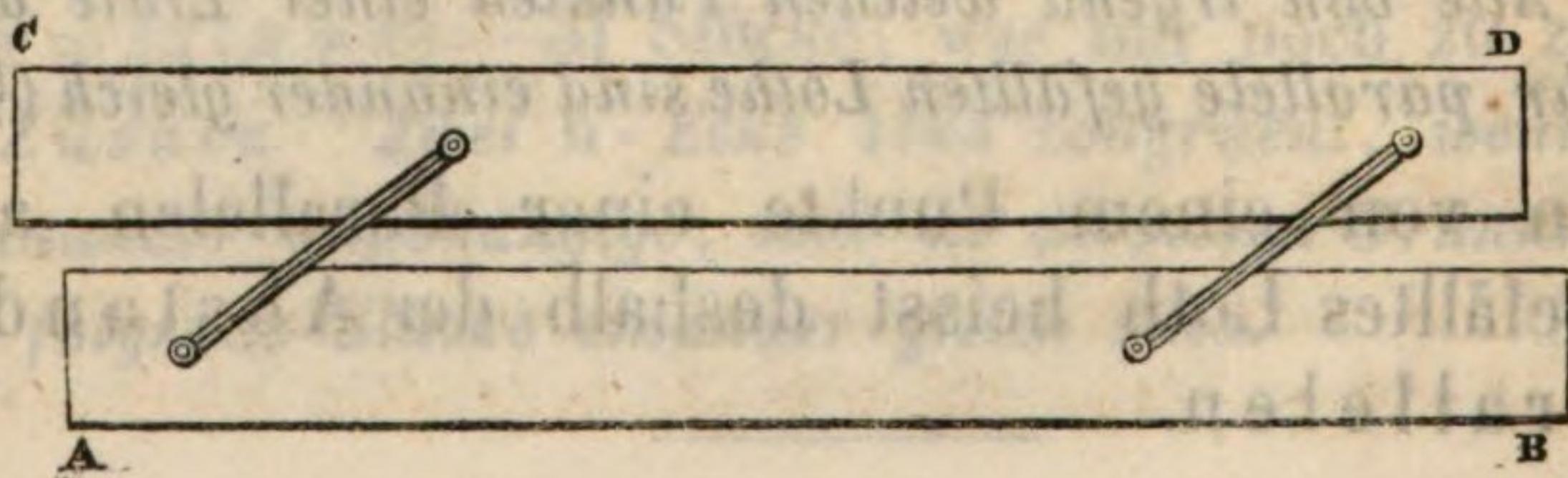
§. 92. Lehrsatz. Sind je zwei Gegenseiten in einem Vierecke einander gleich, dann ist es ein Parallelogramm.

Voraussetz. $\begin{cases} AB = CD \\ AD = BC. \end{cases}$

Behaupt. $\begin{cases} AB \parallel CD \\ AD \parallel BC. \end{cases}$

Beweis. Man ziehe eine Diagonale, beweise die Congruenz der entstandenen Dreiecke ($ABD \cong BCD$), dann folgt aus §. 49. 2., dass die Gegenseiten parallel sind.

Anmerk. Auf diesen Satz gründet sich der Gebrauch des Parallelenziehers.

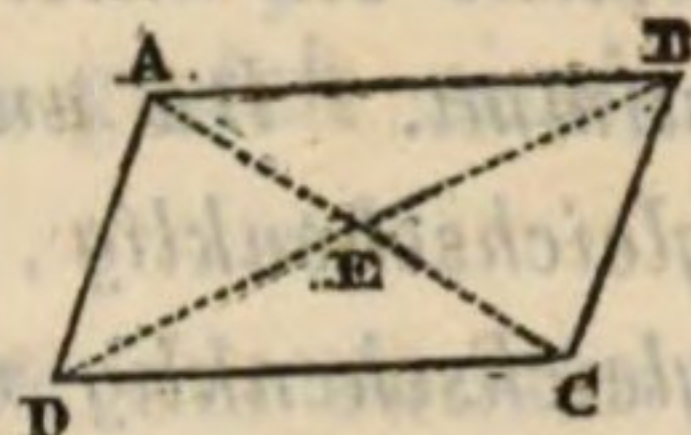


§. 93. **Lehrsatz.** Sind zwei Seiten in einem Vierecke gleich und parallel, so ist es ein Parallelogramm.

Vorausss. $AB \parallel CD$.

Behaupt. $AD \parallel BC$.

Beweis. Aus $\triangle ABD \cong \triangle BCD$ (§. 63.) folgt $AD = BC$ und hieraus (§. 92.) mit Rücksicht auf die Voraussetzung endlich $AD \parallel BC$, w. z. b. w.



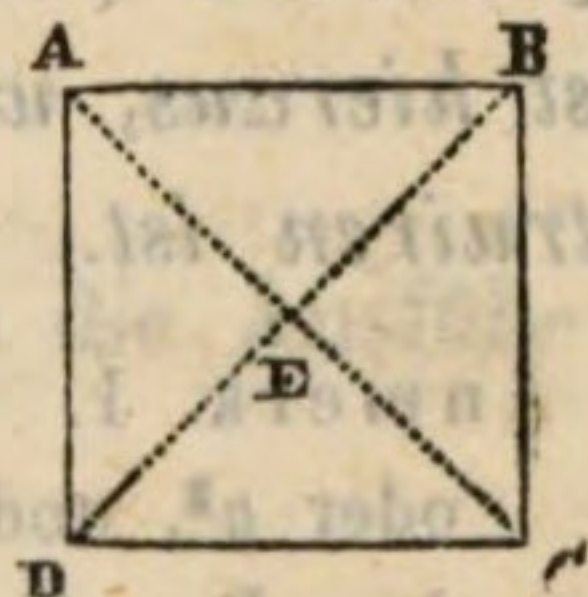
§. 94. **Lehrsatz.** Sind in einem Vierecke je zwei gegenüberliegende Winkel einander gleich, so ist dasselbe ein Parallelogramm.

Vorausss. $\begin{cases} \angle ABC = \angle ADC \\ \angle DAB = \angle BCD. \end{cases}$

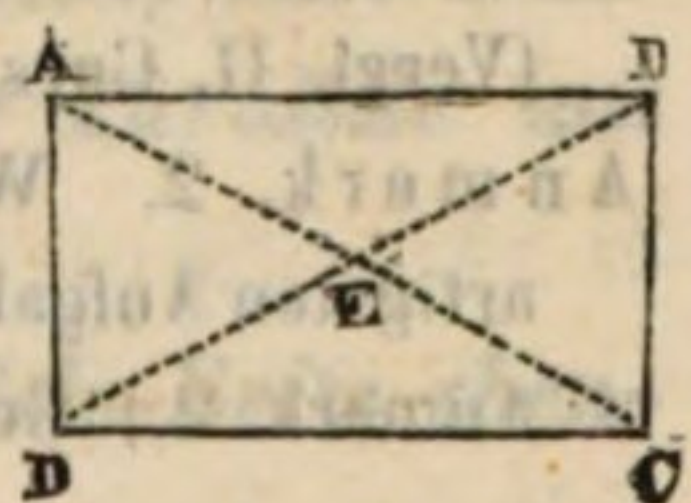
Behaupt. $\begin{cases} AB \parallel CD \\ AD \parallel BC. \end{cases}$

Beweis. Nach §. 80b. ist die Summe aller Winkel $= 4R$, folglich $\angle ABC + \angle BCD = 2R$, deshalb $AB \parallel CD$, und auch $\angle BCD + \angle CDA = 2R$, deshalb $AD \parallel BC$ (§. 49. 3.)

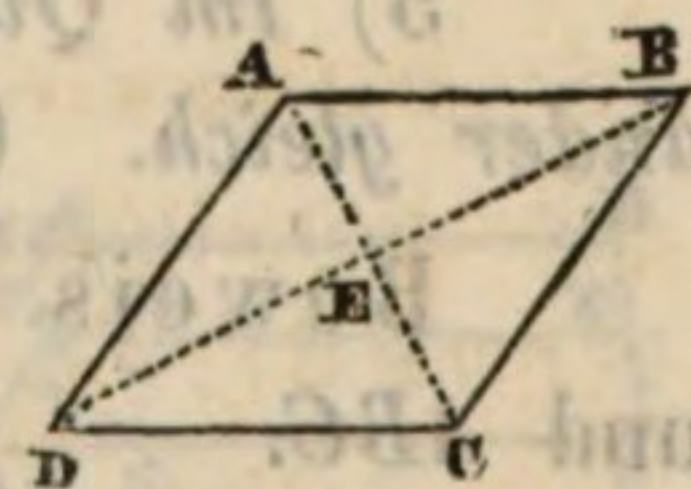
§. 95. **Erklärungen.** 1) Sind in einem Parallelogramm alle Seiten gleich und alle Winkel Rechte, so heisst es ein Quadrat.



2) Sind nur die gegenüberliegenden Seiten gleich, aber alle Winkel Rechte, so heisst es ein Rechteck. (*Oblongum*.)



3) Sind alle Seiten eines Parallelogramms gleich, die Winkel aber schiefe, so heisst es ein Rhombus oder eine Raute.



4) Sind nur die gegenüberliegenden Seiten gleich und die Winkel schiefe, so heisst das Parallelogramm ein Rhomboid. (S. Fig. zu §. 93.)

§. 95b. **Zusätze.** 1) Da (§. 91b. 3 und 7.) ein Parallelogramm durch jedes der durch die Diagonalen gebildeten Dreiecke bestimmt wird, und da hinwiederum ein Dreieck durch drei Stücke, bei denen wenigstens eine Seite sein muss,

bestimmt ist; so ist auch im Allgemeinen ein Parallelogramm durch drei solche Stücke, zu denen ausser den Seiten und Winkeln des Parallelogramms die Diagonalen und die Winkel, welche sie unter sich und mit den Seiten bilden, gehören, bestimmt. Da nun beim Quadrat alle Dreiecke rechtwinklig und gleichschenkelig, beim Rechteck rechtwinklig, beim Rhombus gleichschenkelig und beim Rhomboid ungleichseitig sind, so sind zur Construction

- a. eines Quadrats ein Stück,
- b. eines Rechtecks zwei Stücke,
- c. eines Rhombus zwei Stücke,
- d. eines Rhomboids drei Stücke

unter obiger Bedingung hinreichend, aber auch erforderlich.

2) Wenn man die Schenkel eines rechten Winkels gleich einer gegebenen Linie a macht, und zieht durch die Endpunkte der abgetragenen Stücke mit diesen Parallele bis zum Durchschnitte, so ist das dadurch entstandene Parallelogramm ein Quadrat, das die Linie a zur Seite hat. Leicht zu ersehen ist hieraus, wie aus zwei Seiten b und c ein Rechteck zu construiren ist.

Anmerk. 1. Man bezeichnet ein Quadrat, dessen Seite $= a$ ist, durch a^2 oder a^2 , und ein Rechteck, dessen Seiten b und c sind, durch $b \times c$ oder bc . Der Grund für diese Bezeichnungsweise wird sich später ergeben. (Vergl. II. Curs. der Plan.)

Anmerk. 2. Wie sich für die einzelnen Parallelogramme die verschiedenartigsten Aufgaben bilden lassen, ist aus dem früher beim Dreiecke (§. 86. Anmerk. 2.) Gesagten zu ersehen.

3) Im Quadrat und Rechteck sind die Diagonalen einander gleich. (S. Fig. zu §. 95. 1 und 2.)

Beweis. Folgt aus der Congruenz der Dreiecke ABD und ABC .

4) Quadrat und Rhombus werden durch beide Diagonalen in vier congruente Dreiecke getheilt. (S. Fig. zu §. 95, 1 u. 3.)

Beweis. Folgt aus §. 67.

5) Im Quadrat und Rhombus stehen die Diagonalen senkrecht aufeinander.

Beweis. Folgt aus 4) mit Rücksicht auf §. 36.

§. 96. **Erklärungen.** 1) Ein Viereck, in welchem zwei Seiten parallel und die beiden andern gleich (aber nicht parallel) sind, heisst ein **Antiparallelogramm**.

2) Ein Viereck, in welchem zwei Seiten parallel, die beiden andern aber weder parallel noch gleich sind, heisst ein **Trapez**.

3) Ein Viereck, in welchem keine Seite der andern parallel ist, heisst ein **Trapezoid**.

§. 96b. **Zusätze.** In jedem Antiparallelogramm ABCD ist:

1) $\angle ADC = \angle BCD$ ($\triangle ADF$ ist gleichschenkelig),

2) $\angle ABC = \angle BAD$ (die Ergänzungen voriger zu 2R),

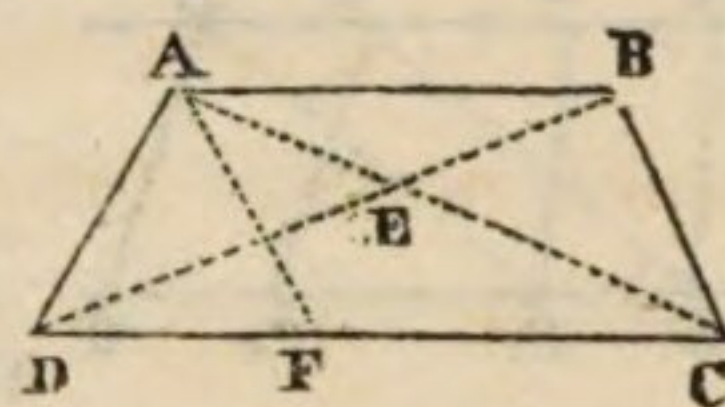
3) $\left\{ \begin{array}{l} \triangle ACD \cong \triangle BDC \\ \triangle ABD \cong \triangle ABC \end{array} \right\}$ (§. 63.)

4) $BD = AC$,

5) $\triangle DEC$ und $\triangle AEB$ gleichschenkelig (§. 11. a. in Bezug auf Winkel),

6) $\triangle AED \cong \triangle BEC$ (§. 63.).

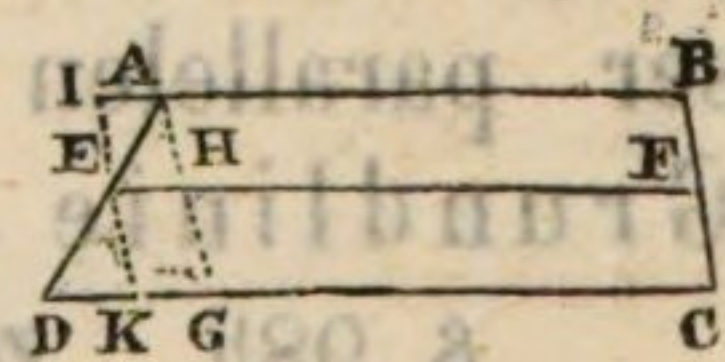
(Die Aufstellung der Sätze in Worten, sowie die Ausführung ihrer Beweise überlassen wir dem Schüler.)



§. 97. **Lehrsätze.** Wenn man durch den Mittelpunkt einer der nicht parallelen Seiten eines Trapezes eine Parallele mit den parallelen Seiten zieht,

1) so halbiert diese die andere nicht parallele Seite ebenfalls, und

2) ist gleich der halben Summe der beiden parallelen Seiten oder wie man sagt: gleich dem arithmetischen Mittel zwischen beiden parallelen Seiten.



Beweis. 1) Man ziehe $EK \parallel AG \parallel BC$, dann ist $\triangle AEH \cong \triangle DEK$ (§. 64.). Hieraus folgt $AH = EK = HG$ und hieraus (§. 91.) $BF = FC$.

2) Verlängern wir noch EK und AB bis zum Durchschnitte in I , so ist offenbar $AI = DK$. Bezeichnen wir diese Strecke durch x , so ist

$$EF = AB + x, \text{ aber auch}$$

$$EF = DC - x$$

$$2EF = AB + DC$$

$$EF = \frac{1}{2}(AB + DC), \text{ w. z. b. w.}$$

§. 97b. *Zusatz.* Das im Beweise vorigen Satzes mit x bezeichnete Stück ist gleich der halben Differenz zwischen den parallelen Seiten.

Behaupt. $DK = AI = \frac{1}{2}(DC - AB)$.

Beweis. Es ist

$$2x = DG = DC - GC$$

$$= DC - AB,$$

$$\text{folglich } x = \frac{1}{2}(DC - AB), \text{ w. z. b. w.}$$

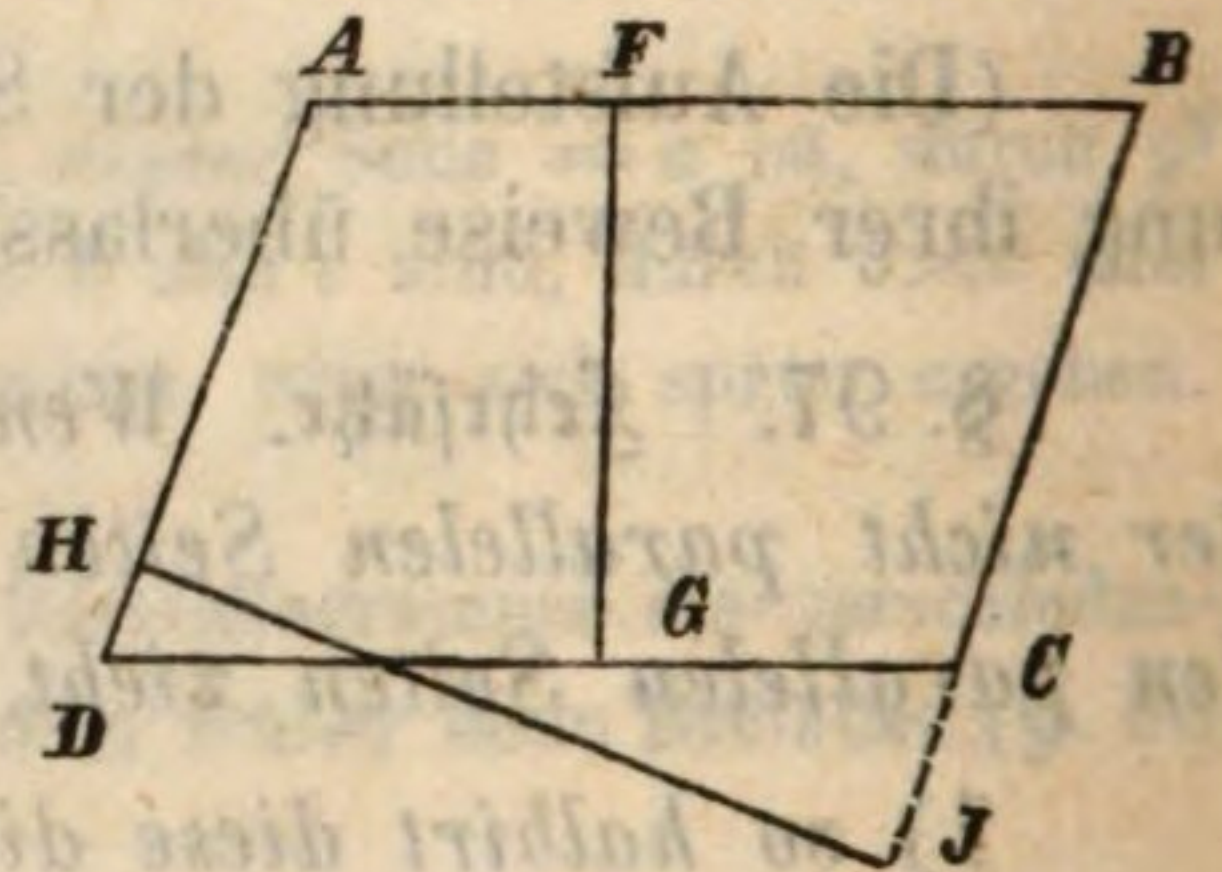


Drittes Kapitel.

Von der Gleichheit der Flächeninhalte der Parallelogramme und Dreiecke. Pythagoräischer Lehrsatz.

§. 98. *Erklärungen.* 1) Der Abstand zweier paralleler Seiten eines Parallelogramms heisst in Bezug auf eine dieser Seiten als Grundlinie eine Höhe desselben.

2) Der Abstand der parallelen Seiten eines Antiparallelogramms oder Trapezes heisst in Bezug auf eine dieser parallelen Seiten (gewöhnlich der grössern) als Grundlinie die Höhe desselben.



§. 98b. *Zusätze.* 1) Zu jedem Parallelogramme gehören zwei Höhen und ein Paar Grundlinien.

2) Im Quadrat und Rhombus sind, so wie die Seiten, auch die Höhen einander gleich.

3) Im Quadrat und Rechteck stellen je zwei zusammenstossende Seiten Grundlinie und Höhe dar. Beim Quadrat ist somit die Höhe gleich der Grundlinie.

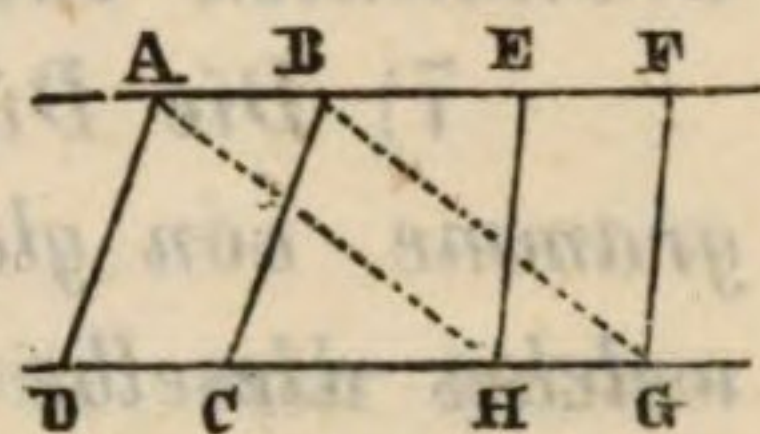
4) *Parallelogramme, welche zwischen denselben Parallelen liegen, d. h. von denen jedes ein Paar Gegenseiten in diesen Parallelen liegen hat, haben in Bezug auf eine dieser Gegenseiten als Grundlinie gleiche Höhen. Umgekehrt lassen sich Parallelogramme, welche eine gleiche Höhe haben, zwischen dieselben parallelen Linien bringen.*

§. 99. *Satz. Parallelogramme von gleicher Grundlinie und Höhe sind einander gleich, d. h. haben gleichen Flächeninhalt.*

Voraussetz. $\parallel \text{gr } AC$ und $\parallel \text{gr } EG$ haben gleiche Grundlinien (DC, HG) und gleiche Höhen.

Behaupt. $\parallel \text{gr } AC = \parallel \text{gr } EG$.

Beweis. Man lege beide Parallelogramme $ABCD$ und $EFGH$ zwischen dieselben parallelen Linien (§. 98b. 4.) und zwar so, dass sie ganz ausserhalb einander liegen. Hierdurch entstehen zwei Trapeze $AEHD$ und $BFGC$, welche gleichen Flächeninhalt haben, da



$$\triangle ADH \cong \triangle BCG \text{ und}$$

$$\triangle AEH \cong \triangle BFG \text{ ist.}$$

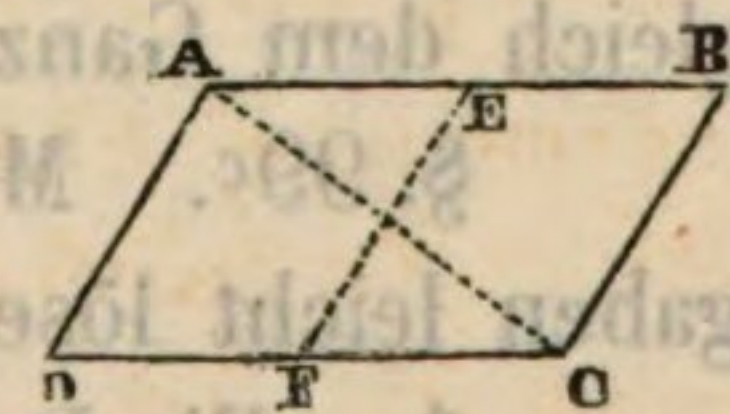
Wird beiderseits das gemeinschaftliche Trapez $BEHC$ subtrahiert, so folgt die Richtigkeit des Satzes unmittelbar.

Anmerk. Die beiden grossen Trapeze sind nicht nur einander gleich, sondern auch congruent; doch ist Letzteres hier gleichgültig.

§. 99b. *Zusätze.* 1) *Jedes Dreieck lässt sich als die Hälfte eines Parallelogramms ansehen, welches mit ihm gleiche Höhe und Grundlinie hat. (§. 91b. 3.)*

2) *Dreiecke von gleichen Grundlinien und Höhen sind einander gleich. (1. und §. 99.)*

3) *Ein Dreieck ist gleich einem Parallelogramme, das mit ihm dieselbe Höhe und halbe Grundlinie hat.*



Beweis. Verbinden wir die Mittelpunkte der Gegenseiten (E mit F), so ist $\parallel \text{gr } AF = \frac{1}{2} \parallel \text{gr } AC$ (§. 99.) und auch $\triangle ADC = \frac{1}{2} \parallel \text{gr } AC \cdot h$ (1.)

4) *Ein Dreieck ist gleich einem Parallelogramme, das mit ihm dieselbe Grundlinie und halbe Höhe hat.*

Beweis. Betrachten wir AD als gemeinschaftliche Grundlinie, so ist $\parallel \text{gr } AF \cong \parallel \text{gr } EC$, folglich hat $\parallel \text{gr } AF$ die halbe Höhe von $\parallel \text{gr } AC$ u. s. w.

5) *Ein Parallelogramm ist gleich der Hälfte eines andern, das dieselbe Grundlinie und doppelte Höhe, oder doppelte Grundlinie und dieselbe Höhe des erstern hat.*

Beweis. Ergiebt sich leicht aus letzter Figur.

6) *Parallelogramme oder Dreiecke von gleichen Höhen sind zusammengenommen gleich einem dritten Parallelogramme oder Dreiecke, welches dieselbe Höhe und die Summe der Grundlinien zur Grundlinie hat.*

7) *Die Differenz der Flächeninhalte zweier Parallelogramme von gleicher Höhe ist gleich einem Parallelogramme, welches dieselbe Höhe und die Differenz der Grundlinien zur Grundlinie hat.*

8) *Zwei Parallelogramme oder Dreiecke von gleicher Grundlinie sind zusammengenommen gleich einem dritten Parallelogramme oder Dreiecke, welches dieselbe Grundlinie und die Summe der Höhen zur Höhe hat.*

9) *Die Differenz der Flächeninhalte zweier Parallelogramme von gleicher Grundlinie ist gleich einem Parallelogramme, welches dieselbe Grundlinie und die Differenz der Höhen zur Höhe hat.*

10) *Parallelogramme oder Dreiecke von gleichem Inhalte und gleicher Höhe haben auch gleiche Grundlinien; und umgekehrt bei gleichen Grundlinien auch gleiche Höhen.*

Beweis. Ergiebt sich leicht indirect. Man nimmt an, eins habe eine grössere Grundlinie resp. Höhe, und denkt sich darauf die andre abgetragen und eine Parallele mit der daranstossenden Seite gezogen, dann kommt man wegen der entstehenden Parallelogramme auf die Ungereimtheit, dass ein Theil gleich dem Ganzen sei.

§. 99c. Mit Hülfe dieser Sätze lassen sich folgende Aufgaben leicht lösen:

1. Ein Dreieck in beliebig viele gleiche Theile zu theilen, so dass die Theilungslinien a) von einer Winkelspitze, b) von einem Punkte einer Seite oder c) von einem Punkt innerhalb ausgehen.

2. Ein Parallelogramm in beliebig viel gleiche Theile zu theilen, so dass die Theilungslinien einer Seite parallel sind.*)

3. Ein schiefwinkliges Parallelogramm in ein anderes, welches einen gegebenen Winkel hat, zu verwandeln.

4. Ein Viereck in ein Dreieck von gleichem Flächeninhalte, oder allgemein ein n -Eck in ein $(n - 1)$ -Eck zu verwandeln.

5. Jede geradlinige Figur in ein Dreieck oder Parallelogramm zu verwandeln.

6. Ein Parallelogramm durch eine gerade Linie so zu halbiren, dass die Halbierungslinie durch einen in einer Seite, oder innerhalb, oder ausserhalb des Parallelogramms liegenden Punkt geht.

§. 100. **Satz.** Wenn man in einem Parallelogramme eine Diagonale und durch einen Punkt derselben Parallelen mit den Seiten zieht, so wird das ursprüngliche Parallelogramm in vier andere zerlegt, von welchen

1) die beiden, durch welche die Diagonale geht, mit dem ursprünglichen gleichartig, d. h. bei gleichen Winkeln zugleich mit ihm Quadrate, Rechtecke, Rhomben und Rhomboide sind;

2) die beiden übrigen Parallelogramme dagegen von gleicher Grösse sind.

Voraus. { Im $\parallel$ gr AC ist $FEG \parallel AB$ und
 $IEH \parallel AD$.

Behaupt. { 1) $\parallel$ gr IG u. $\parallel$ gr FH gleichartig.
 2) $\parallel$ gr $AE = \parallel$ gr EC .

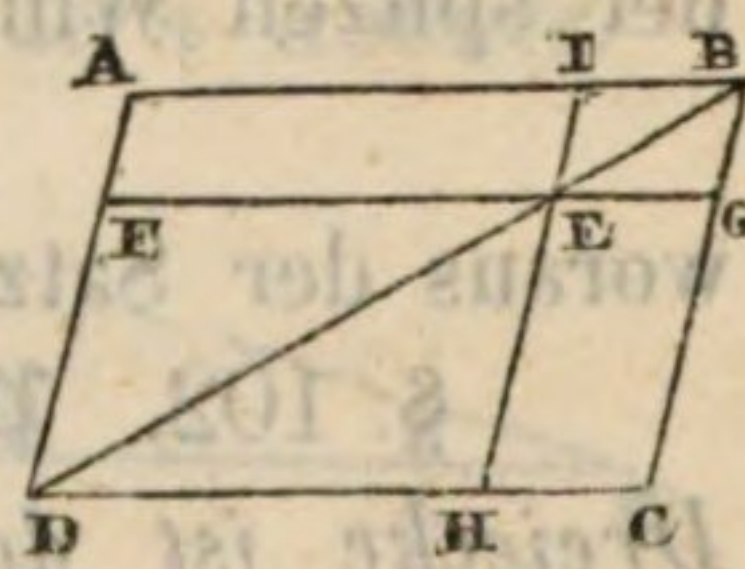
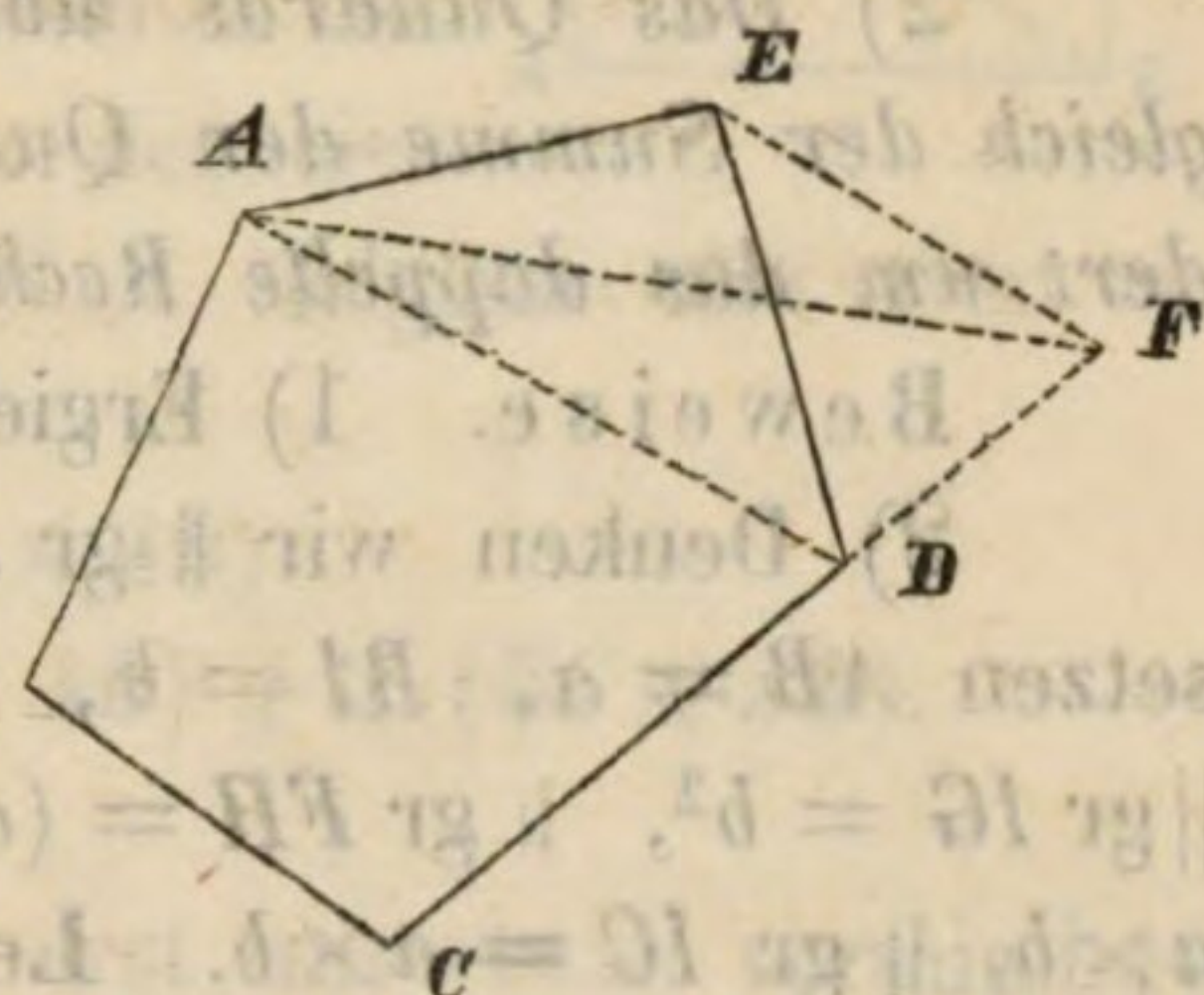
Beweis. 1) Dass FH und IG mit AC gleiche Winkel haben, ergiebt sich unmittelbar.

Dass die ersteren Parallelogramme mit letzterm gleichartig sind, wird dadurch erwiesen, dass man zeigt, dass

$$AD \cong AB \text{ auch}$$

$$FD \cong FE \text{ zur Folge hat.}$$

Letzteres ergiebt sich leicht mit Zuziehung von §. 66. und §. 69.



*) Bei den ersten beiden Aufgaben wird vorausgesetzt, dass man eine gerade Linie in beliebig viel gleiche Theile theilen könne.

2) Ergiebt sich mit Zuziehung von §. 91b. 3. u. §. 11. a.

§. 100b. *Zusätze.* 1) *Das Quadrat über der Summe zweier Linien ist gleich der Summe der Quadrate über beiden Linien, vermehrt um das doppelte Rechteck aus beiden Linien.*

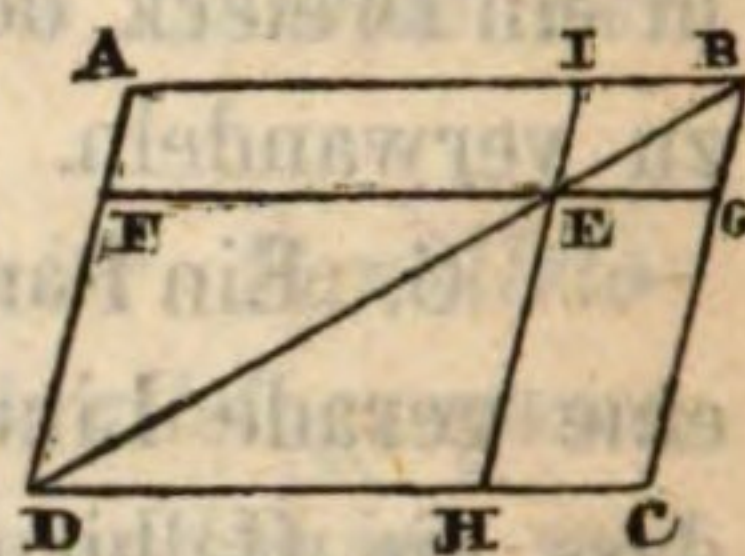
2) *Das Quadrat über der Differenz zweier Linien ist gleich der Summe der Quadrate über beiden Linien, vermindert um das doppelte Rechteck aus beiden Linien.*

Beweise. 1) Ergiebt sich ohne Weiteres aus §. 100.

2) Denken wir $\parallel$ gr AC als ein Quadrat, setzen $AB = a$, $BI = b$, so ist $\parallel$ gr $AC = a^2$, $\parallel$ gr $IG = b^2$, $\parallel$ gr $FH = (a - b)^2$, $\parallel$ gr $AG = a \times b$, $\parallel$ gr $IC = a \times b$. Leicht ergibt sich nun

$$a^2 = (a - b)^2 + 2 \cdot a \times b - b^2;$$

woraus $a^2 + b^2 - 2 \cdot a \times b = (a - b)^2$ folgt.



§. 101. *Lehrsatz.* Wenn man in einem rechtwinkligen Dreiecke aus der Spitze des rechten Winkels auf die Hypotenuse ein Loth fällt, so ist das Quadrat über einer Kathete gleich dem Rechtecke aus der Hypotenuse und ihrem an jener Kathete liegenden Abschnitte.

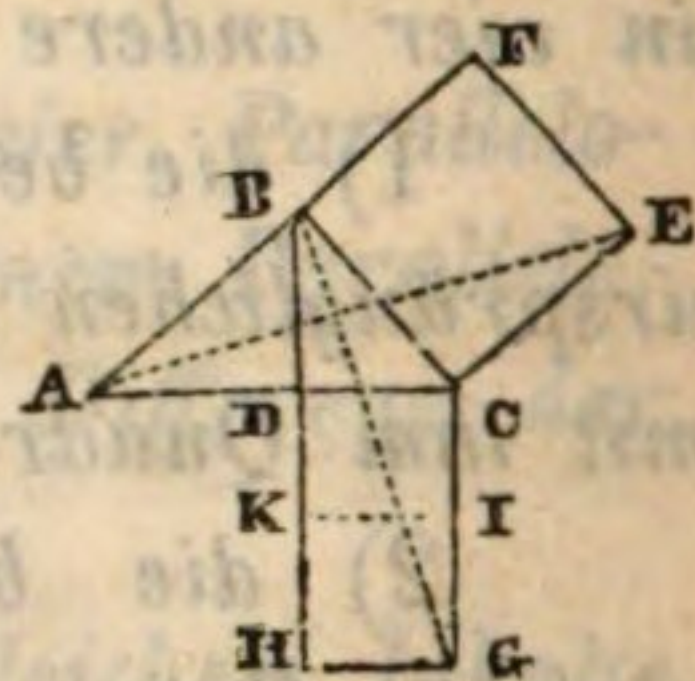
Voraus. $\begin{cases} \triangle ABC = R \\ BD \perp AC. \end{cases}$

Behaupt. $BC^2 = CD \times AC$.

Beweis. Man construiere $BC^2 = BFEC$ und $CD \times AC = CGHD$ (§. 95b. 2.); ziehe dann in den erhaltenen Trapezen $AFEC$ und $BCGH$ von den Scheiteln der spitzen Winkel die Diagonalen AE und BG ; dann ist

$$\triangle AEC \cong \triangle BCG \text{ (§. 63.)},$$

woraus der Satz mit Zuziehung von §. 99b. 1. folgt.



§. 102. *Pythagoräischer Lehrsatz.* In jedem rechtwinkligen Dreiecke ist das Quadrat über der Hypotenuse gleich der Summe der Quadrate über beiden Katheten.

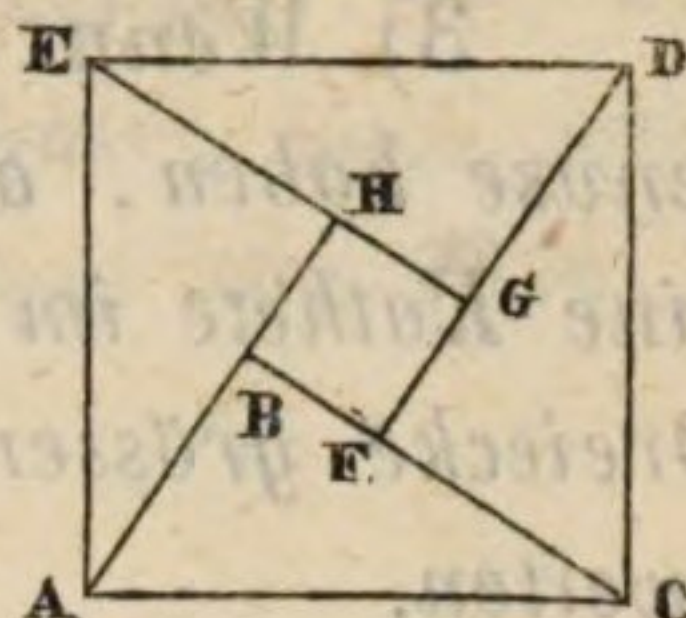
Voraus. $\triangle ABC$ bei B rechtwinklig.

Behaupt. $AB^2 + BC^2 = AC^2$.

1) *Beweis.* Unmittelbare Folge des vorigen Satzes, wenn man die für beide Katheten erhaltenen Gleichungen addirt. (Siehe letzte Figur.)

2) *Beweis.* Man beschreibe über der Hypotenuse AC auf derselben Seite, wo das Dreieck liegt, das Quadrat $ACDE$,

ziehe $DF \perp BC$, $EG \perp DF$ und verlängere AB bis H ; dann besteht das ganze Quadrat AD aus den vier unter einander congruenten Dreiecken ABC , CFD , DGE und EAH und aus dem Vierecke $BFGH$, welches offenbar ein Quadrat mit der Seite $BC - AB$ ist. Nun ist jedes der vier Dreiecke $= \frac{1}{2} \cdot (BC \times AB)$ (§. 99b. 1.), folglich alle vier $= 2 \cdot (BC \times AB)$. Es ist somit



$$\begin{aligned} AC^2 &= (BC - AB)^2 + 2 \cdot (BC \times AB) \\ &= BC^2 + AB^2 - 2 \cdot (BC \times AB) + 2 \cdot (BC \times AB). \end{aligned}$$

(§. 100b. 2.)

folglich, da offenbar eine Grösse, die erst um etwas vermindert und dann um dasselbe wieder vermehrt wird, ungeändert bleibt:

$$AC^2 = BC^2 + AB^2, \text{ w. z. b. w.}$$

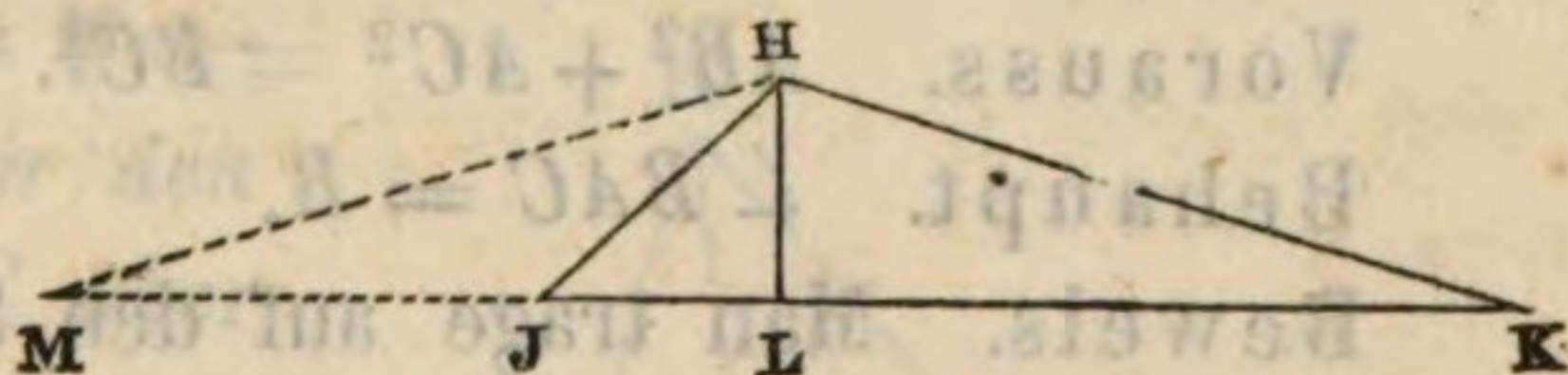
(Mehrere andere Beweise des pythagoräischen Lehrsatzes finden sich in der Schrift: Lehrsätze und Aufgaben aus Jacobi's Anhängen zu v. Swinden's Geometrie. Mit Beispielen etc. herausgegeben von Dr. Wiegand. 1. Band.)

Anmerk. 1) Mit Hülfe dieses Satzes lassen sich zwei und mehrere Quadrate in ein einziges verwandeln.

Anmerk. 2) Solche rechtwinklige Dreiecke, deren Seite sich bei einerlei Maass durch ganze Zahlen ausdrücken lassen, heissen pythagoräische Dreiecke. Eine Tabelle für Seiten solcher Dreiecke s. in meinem Lehrbuche der ebenen Trigonometrie. Anh. 5. Kap.

§. 102b. *Zusätze.* 1) Das Quadrat über einer Kathete im rechtwinkligen Dreiecke ist gleich dem Unterschiede zwischen dem Quadrate der Hypotenuse und dem der andern Kathete.

2) Wenn in zwei rechtwinkligen Dreiecken ein Paar Katheten gleich, die andern aber ungleich sind, so sind auch die Hypotenusen ungleich und zwar gehört zur grössern Kathete die grössere Hypotenuse.



Vorauss. In den rechtwinkligen Dreiecken JLH und KLH ist $HL = HL$, $LK > LJ$.

Behaupt. $HK > JH$.

Beweis. Die Richtigkeit dieses Satzes folgt auch aus §. 69b. 1.

3) Wenn zwei rechtwinklige Dreiecke eine gleiche Hypotenuse haben, aber eine Kathete in dem einen kleiner ist, als eine Kathete im andern, so ist die andere Kathete im erstern Dreiecke grösser, als die andere Kathete im zweiten.

Vorausss. $\begin{cases} MA = MD \\ MC > MF. \end{cases}$

Behaupt. $AC < FD.$

Beweis. Folgt mit Anwendung von 1.

§. 103. *Lehrsatz.* Das Quadrat über der Höhe eines rechtwinkligen Dreiecks ist gleich dem Rechtecke aus den beiden Abschnitten der Hypotenuse.

Beweis. Nach §. 101. ist $BFEC = DCGH.$

Trägt man nun $CI = DC$ ab und zieht $IK \parallel CD$, so ist offenbar das $\parallel$ gr $DI = DC^2$. Nun ist aber §. 102^b. 1.

$$BD^2 = BC^2 - DC^2, \text{ folglich auch,}$$

$$\text{da } BC^2 = \parallel \text{ gr } DG \text{ und}$$

$$DC^2 = \parallel \text{ gr } DI,$$

$$BD^2 = \parallel \text{ gr } DG - \parallel \text{ gr } DI = \parallel \text{ gr } KG.$$

Nun ist aber, was leicht zu ersehen, $\parallel \text{ gr } KG = DC \times AD$, folglich auch $BD^2 = DC \times AD$, w. z. b. w.

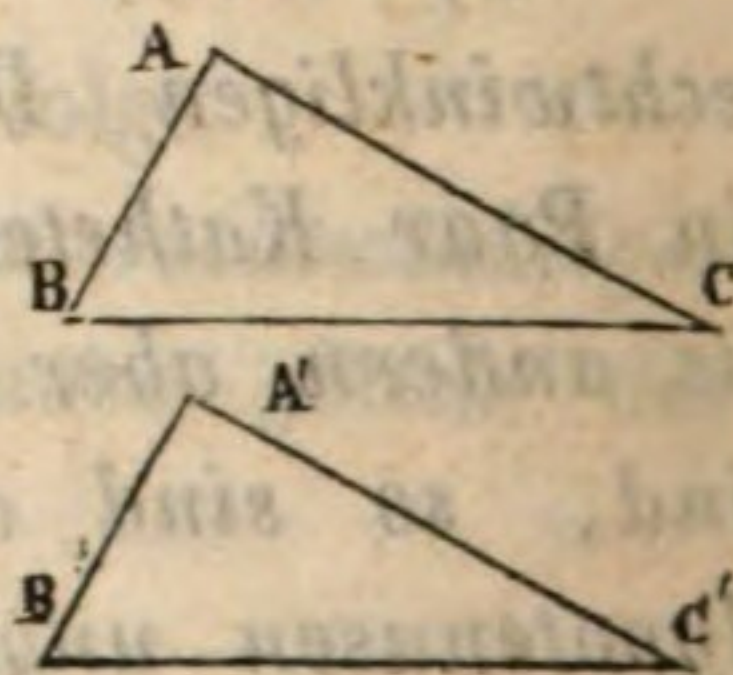
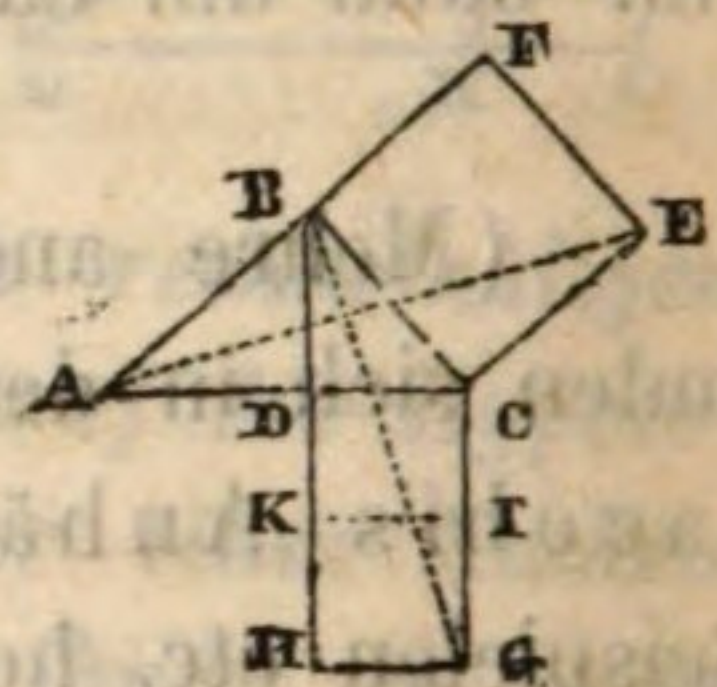
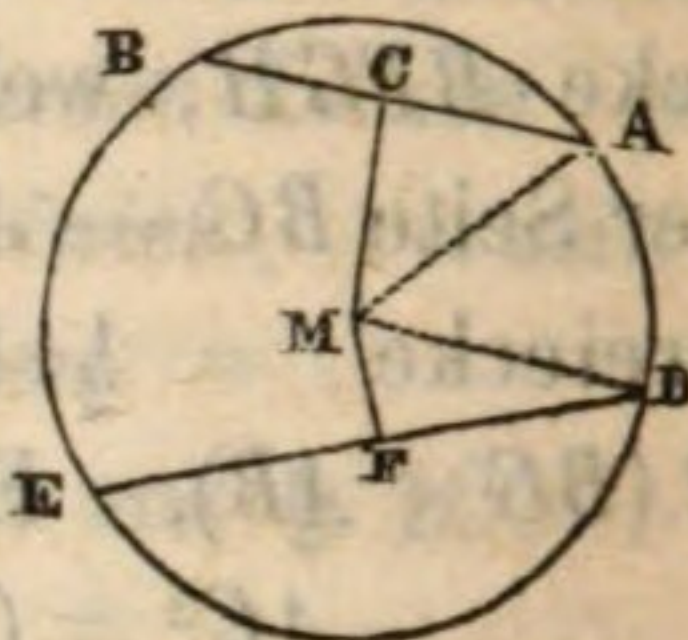
§. 104. *Lehrsätze.* 1) Wenn in einem Dreiecke die Summe der Quadrate über zwei Seiten gleich ist dem Quadrate über der dritten Seite, so ist das Dreieck ein rechtwinkliges, und zwar ist die dritte Seite die Hypotenuse derselben.

Vorausss. $AB^2 + AC^2 = BC^2.$

Behaupt. $\angle BAC = R.$

Beweis. Man trage auf den Schenkeln eines rechten Winkels bezüglich $A'C' = AC$ und $A'B' = AB$ ab und ziehe $B'C'$, wende auf das erhaltene rechtwinklige Dreieck den Pythagoräischen Lehrsatz an, dann folgt die obige Behauptung mit Zuziehung der Voraussetzung und §. 9. aus der Congruenz beider Dreiecke.

2) Wenn die Verbindungslinie einer Winkelspitze im Dreieck mit einem Punkte der Gegenseite die letztere so theilt, dass, wenn man von den Quadraten der beiden andern Seiten

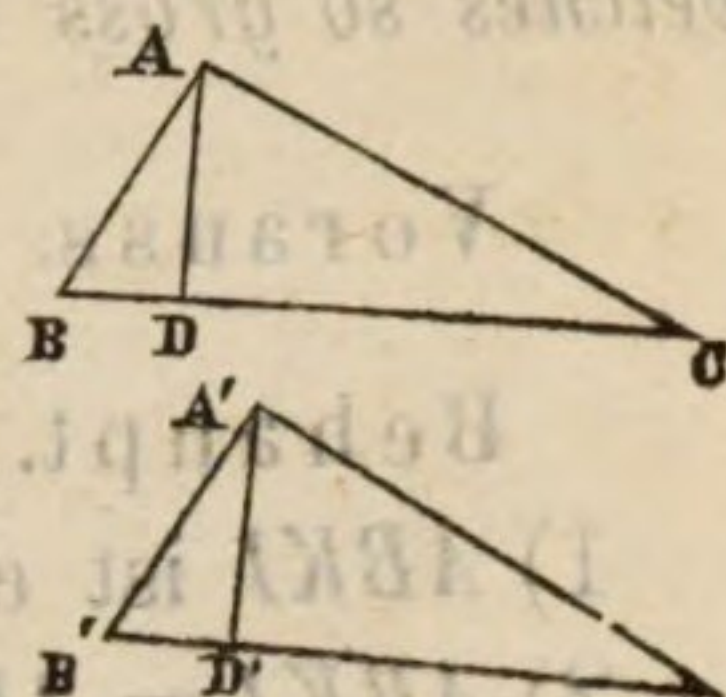


bezüglich die Quadrate der anliegenden Abschnitte (ihre Projectionen §. 104c.) auf der dritten Seite subtrahirt, man gleiche Unterschiede erhält, so ist die Verbindungslinie eine Höhe des Dreiecks.

Vorausss. $AB^2 - BD^2 = AC^2 - CD^2$.

Behaupt. $AD \perp BC$.

Beweis. Man construire aus AB als Hypotenuse und BD als einer Kathete ein rechtwinkliges Dreieck $A'D'B'$, mache $D'C' = DC$ und ziehe $A'C'$.



Nun ist nach Voraussetzung

$$AB^2 - BD^2 = AC^2 - DC^2,$$

$$\text{oder } AB^2 - BD^2 + DC^2 = AC^2 \dots (1)$$

Nach §. 102b.1. ist aber auch

$$A'B'^2 - B'D'^2 = A'C'^2 - D'C'^2$$

$$\text{oder } A'B'^2 - B'D'^2 + D'C'^2 = A'C'^2 \dots (2)$$

Aus der Construction ergibt sich aber die Gleichheit der linken Seiten von (1) und (2), folglich muss auch

$$A'C'^2 = AC^2 \text{ oder}$$

$$A'C' = AC \text{ sein.}$$

Hieraus folgt (§. 67.)

$$\triangle ABC \cong \triangle A'B'C', \text{ also}$$

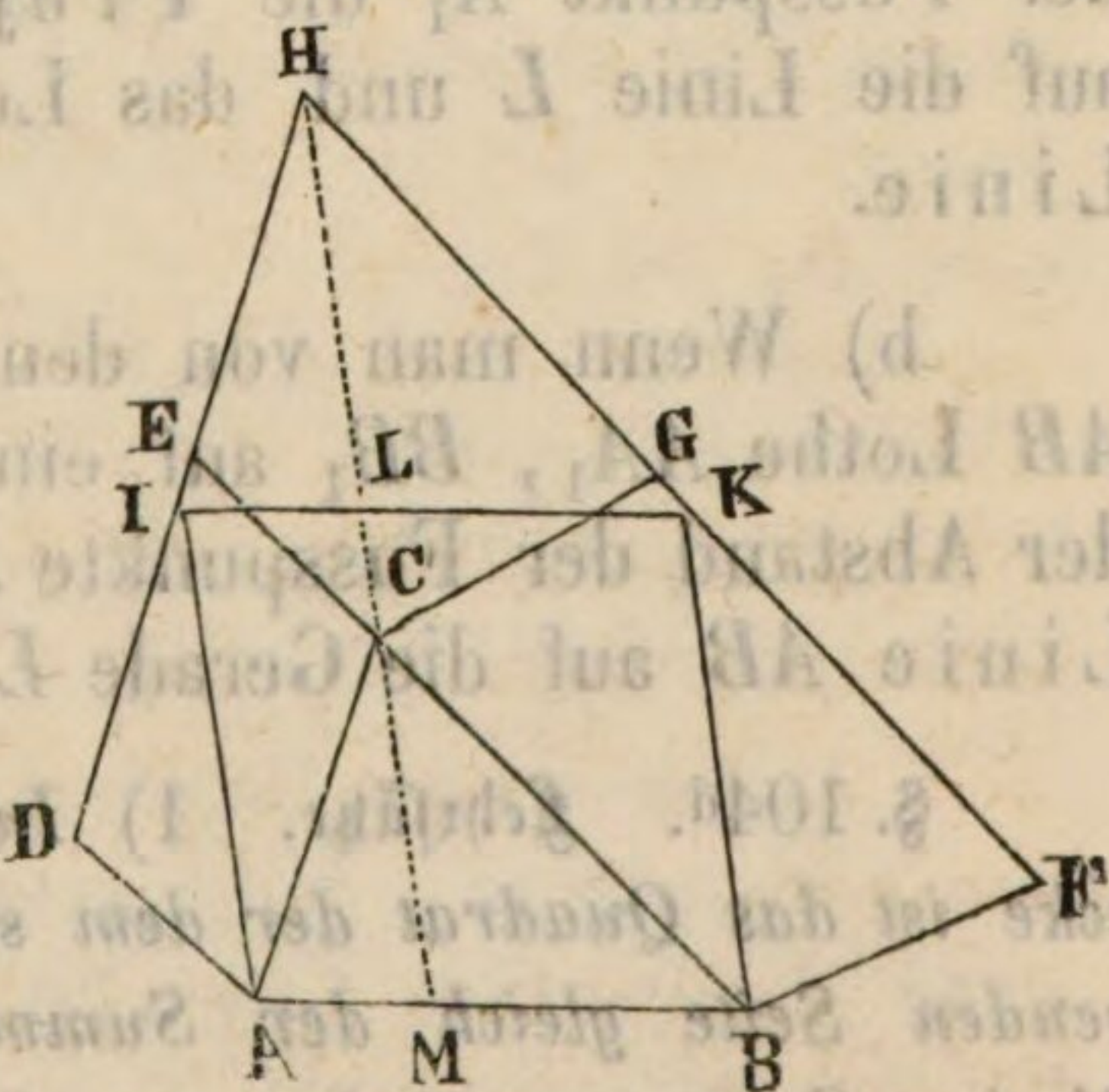
$$\angle ABD = \angle A'B'D', \text{ und hieraus (§. 63.)}$$

$$\triangle ABD \cong \triangle A'B'D', \text{ und daraus}$$

$$\angle ABD = \angle A'B'D' = R,$$

mithin ist AD die Höhe des Dreiecks, w. z. b. w.

§. 104b. **Satz des Pappus.** Beschreibt man über den Seiten eines Dreiecks ABC über zwei Seiten AC und BC nach aussen hin zwei Parallelogramme, $ADEC$ u. $BFGC$, verlängert ihre den Seiten des Dreiecks parallelen Seiten DE , GF bis zum Durchschnitte in H und construirt über der dritten Seite AB ein Viereck $AIKB$, dessen zwei an AB liegenden



Seiten parallel der Verbindungslinie HC sind und bis an die verlängerten Seiten der beiden andern Parallelogramme gehen; so ist auch das letztere Viereck $ABKI$ ein Parallelogramm, welches so gross ist als die beiden vorigen zusammen genommen.

Vorausss. $\begin{cases} CD \text{ und } CF \text{ sind } \parallel \text{ gr.} \\ AI \parallel BK \parallel HC. \end{cases}$

Behaupt.

1) $ABKI$ ist ein $\parallel$ gr.

2) $ABKI = ADEC + BFGC$.

Beweis. Man verlängere HC bis AB und es möge diese Linie in M , IK in L schneiden, dann ist

1) $KB = HC = AI$ (§. 91b.1.)
folglich ist $ABKI$ (§. 93.) ein Parallelogramm.

2) Es ist ferner

$$\begin{aligned} \parallel \text{ gr } BKLM &= \parallel \text{ gr } BKHC \\ &= \parallel \text{ gr } BFGC \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \text{ §. 99. und ebenso}$$

$$\begin{aligned} \parallel \text{ gr } AMLI &= \parallel \text{ gr } AIHC \\ &= \parallel \text{ gr } ADEC \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \text{ §. 99.}$$

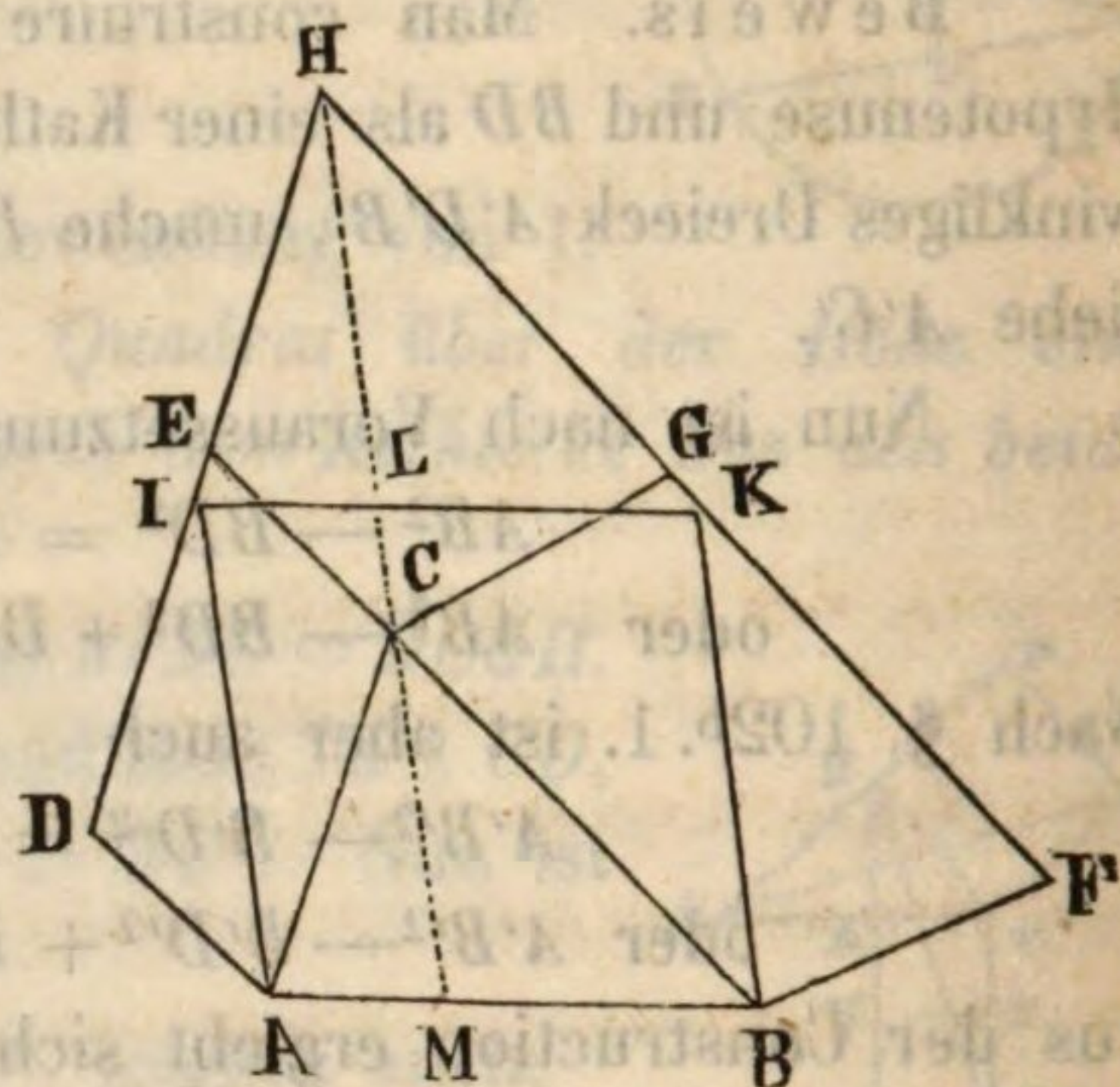
Hieraus aber folgt durch Addition

$$\parallel \text{ gr } ABKI = \parallel \text{ gr } ADEC + \parallel \text{ gr } BFGC, \text{ w. z. b. w.}$$

§. 104c. Erklärungen. a) Wenn man von einem Punkte A ein Loth AA_1 auf eine Linie L fällt, so heisst der Fusspunkt A_1 die Projection des Punktes A auf die Linie L und das Loth AA_1 die projecirende Linie.

b) Wenn man von den Endpunkten einer Geraden AB Lothe AA_1 , BB_1 auf eine Gerade L fällt, so heisst der Abstand der Fusspunkte A_1B_1 die Projection der Linie AB auf die Gerade L .

§. 104d. Lehrsätze. 1) In jedem stumpfwinkligen Dreiecke ist das Quadrat der dem stumpfen Winkel gegenüber liegenden Seite gleich der Summe der Quadrate der beiden übrigen Seiten vermindert um das doppelte Rechteck aus einer



der letzteren und der auf ihr liegenden Projection der anderen.

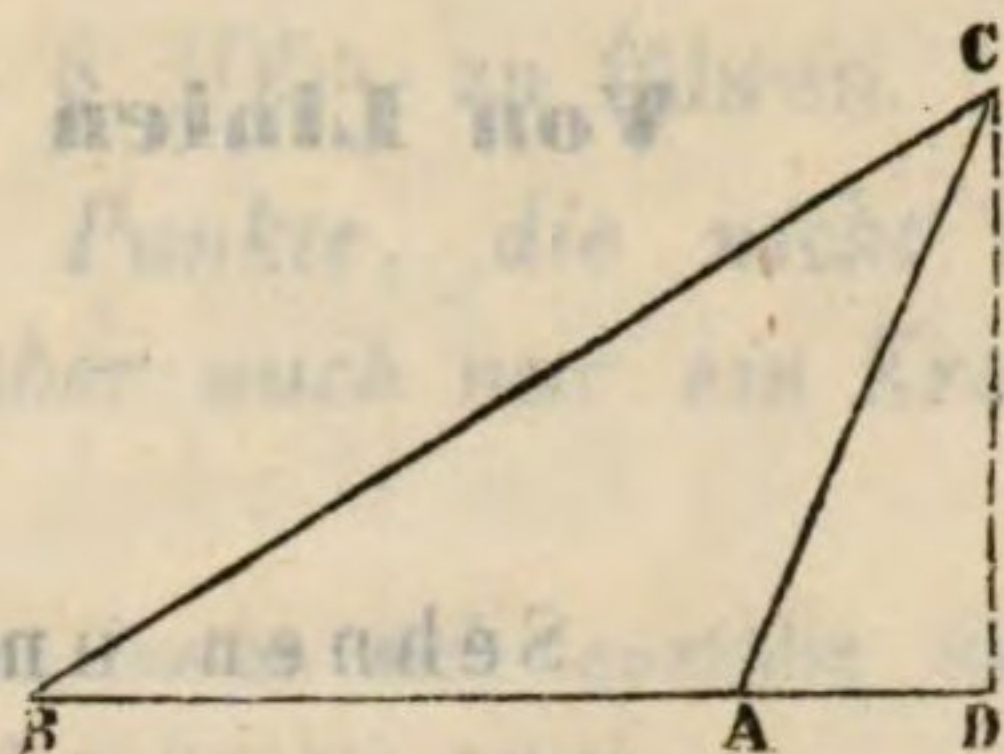
Vorauss. $BAC > R$.

Behaupt.

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 + 2 \cdot AB \times AD.$$

Beweis. Ist $CD \perp BD$, so ist nach §. 104b. AD die Projection der Linie AC auf BD . Nach dem Pythagoräer ist

$$\begin{aligned} \text{nun } BC^2 &= BD^2 + CD^2 \\ &= AB^2 + AD^2 + 2AB \cdot AD + CD^2 \quad (\S. 100b. 1.) \\ &= AB^2 + AD^2 + 2AB \cdot AD + AC^2 - AD^2 \\ &= AB^2 + AC^2 + 2AB \cdot AD. \end{aligned}$$

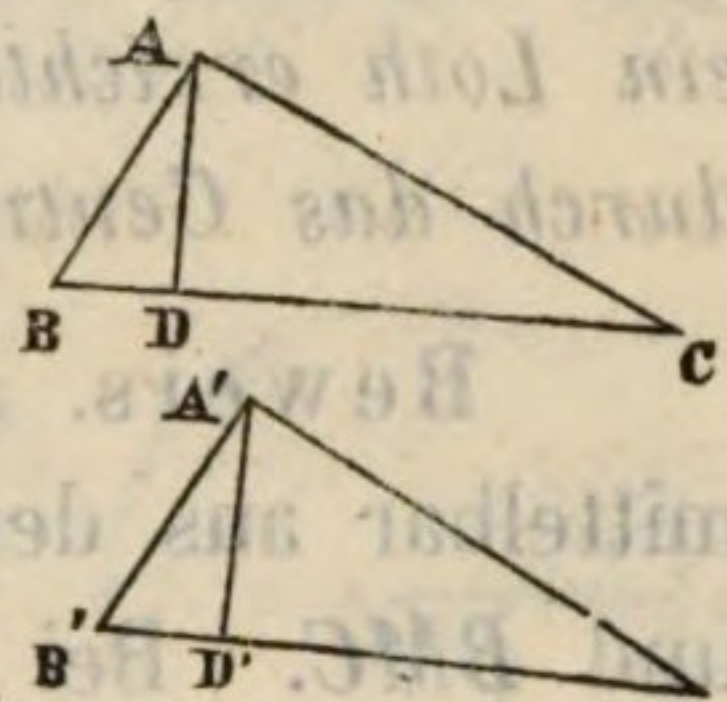


2) Das Quadrat über einer Dreiecksseite, welche einem spitzen Winkel gegenüberliegt, ist gleich der Summe der Quadrate der beiden anderen Seiten vermindert um das doppelte Rechteck aus einer der letzteren und der auf ihr liegenden Projection der anderen.

Vorauss. $ABC < R$.

Behaupt. $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2BC \cdot BD$.

Beweis. Aehnlich dem vorigen mit Anwendung §. 100b. 2.



3) Das Quadrat der von der Spitze eines Dreiecks an die Mitte der Grundlinie gezogenen Transversale (sogen. Mittellinie) ist gleich der halben Summe der Quadrate der beiden anderen Seiten vermindert um das Quadrat der halben Grundlinie.

Beweis. Folgt aus 1) und 2).

Vierter Abschnitt.

Von Linien und Winkeln beim Kreise.

Erstes Kapitel.

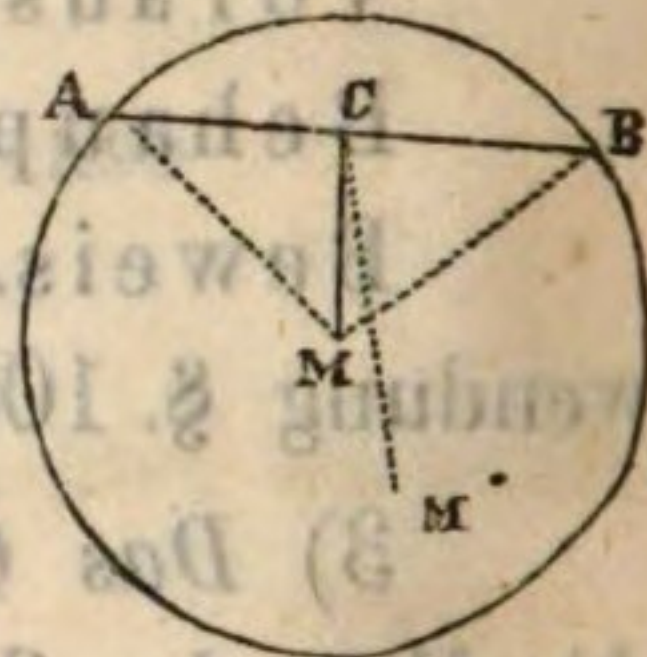
Sehnen und Tangenten beim Kreise.

§. 105. *Lehrsätze.* 1) Wenn man vom Mittelpunkte eines Kreises auf eine Sehne ein Loth fällt, so wird die Sehne halbt.

2) Wenn man den Mittelpunkt des Kreises mit dem Mittelpunkte einer Sehne verbindet, so steht die Verbindungslinie auf der Sehne senkrecht.

3) Wenn man im Mittelpunkte einer Sehne auf derselben ein Loth errichtet, so geht dieses bei gehöriger Verlängerung durch das Centrum des Kreises.

Beweis. 1) und 2) ergeben sich unmittelbar aus der Congruenz der Dreiecke AMC und BMC . Bei 3) hat man zu zeigen, dass die Annahme, das Perpendikel CM' gehe nicht durch das Centrum M , auf die Ungereimtheit führt, dass sich in einem Punkte einer Geraden auf derselben Seite zwei Lothe errichten lassen müssten.



§. 105^b. *Zusatz.* Wenn man in den Mittelpunkten zweier nicht parallelen Sehnen eines Kreises auf denselben Perpendikel errichtet und dieselben bis zum Durchschnitte verlängert, so ist der Durchschnittspunkt der Perpendikel das Centrum des Kreises.

Anmerk. Mit Hülfe dieses Satzes lässt sich der Mittelpunkt eines gegebenen Kreises finden.

§. 106. *Aufgabe.* Durch drei gegebene Punkte, welche nicht in gerader Linie liegen, einen Kreis zu beschreiben.

Auflösung. Man verbinde einen der drei Punkte mit den beiden übrigen durch gerade Linien und errichte darauf in ihren Mittelpunkten Lothe bis zum gegenseitigen Durchschnitte. Der Durchschnittspunkt ist der Mittelpunkt, und der Abstand

desselben von einem der gegebenen Punkte der Radius des Kreises.

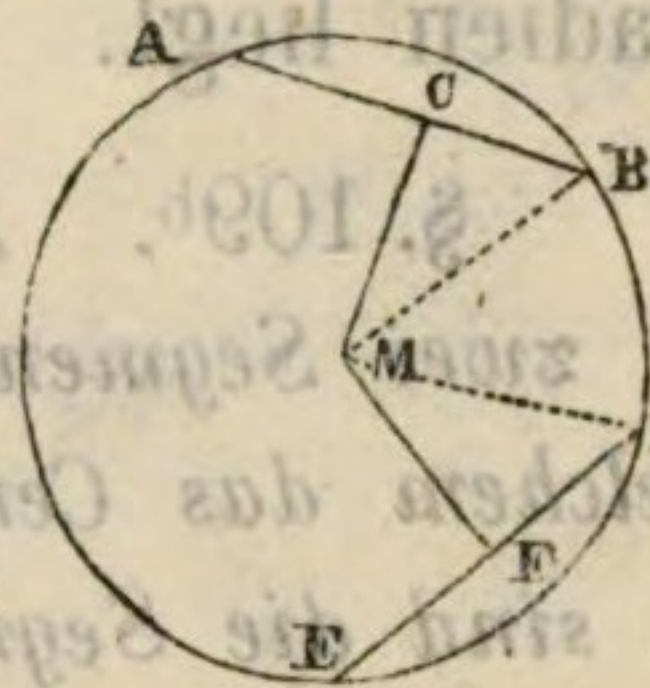
Beweis. Ist mit Zuziehung von §. 105^b. zu führen.

§. 106^b. Zusatz. Durch drei Punkte, die nicht in gerader Linie liegen, ist jederzeit ein, aber auch nur ein Kreis vollkommen bestimmt.

Anmerk. Sind nur zwei Punkte gegeben, so lassen sich unzählig viele Kreise construiren, die alle durch diese beiden Punkte gehen.

§. 107. Lehrrsätze. 1) Alle Sehnen, welche gleich weit vom Centrum abstehen, sind einander gleich.

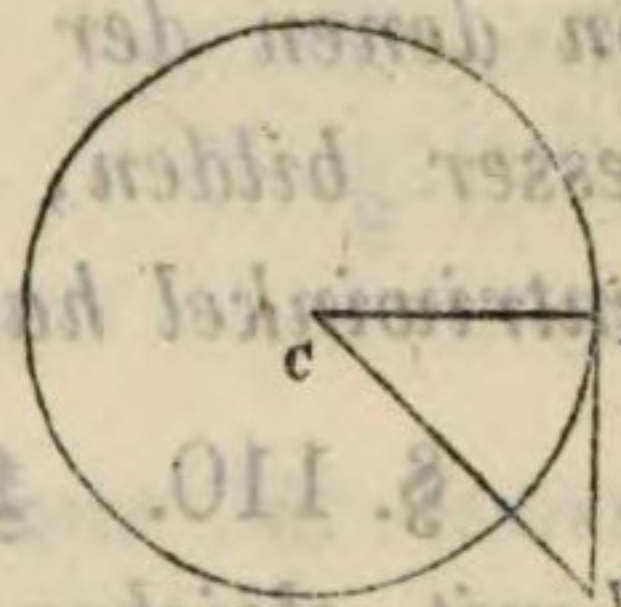
2) Von zwei Sehnen ist diejenige die grössere, welche den kleinsten Abstand vom Centrum hat. (Fig. zu §. 105^b.)



Beweis. 1) Folgt aus der Congruenz der Dreiecke MBC und MDF. 2) aus §. 102^b. 3.

§. 108. Lehrrsätze. 1) Der an den Berührungspunkt einer Tangente gezogene Radius steht senkrecht auf der Tangente.

2) Das im Berührungspunkte der Tangente auf derselben errichtete Loth geht gehörig verlängert durch den Mittelpunkt des Kreises.



Beweis. 1) Folgt aus §. 73^b. 2) ist indirect und ähnlich wie §. 105. 3. zu erweisen.

Zweites Kapitel.

Winkel im Kreise.

§. 109. Erklärungen. 1) Ein Stück des Kreises, welches von einem Kreisbogen und der dazu gehörigen Sehne begrenzt wird, heisst ein Kreisabschnitt (Segment). Ist die Sehne ein Durchmesser, so nennt man das Segment einen Halbkreis.

2) Ein Stück des Kreises, welches von einem Kreisbogen und den an seine Endpunkte gezogenen Radien begrenzt wird, heisst ein Kreisausschnitt (Sector).

3) Ein Winkel, dessen Scheitel in der Peripherie eines Kreises liegt und dessen Schenkel Sehnen dieses Kreises sind, heisst ein Peripheriewinkel. Man sagt, derselbe stehe auf dem Bogen, welcher zwischen den Sehnen liegt.

4) Ein Winkel, dessen Schenkel Radien eines Kreises sind, heisst ein Centriwinkel. Man sagt, er stehe auf dem Bogen, welcher zwischen den beiden Radien liegt.

§. 109^b. *Zusätze.* 1) Jede Sehne theilt den ganzen Kreis in zwei Segmente, von denen dasjenige das grössere ist, in welchem das Centrum liegt. Ist die Sehne ein Durchmesser, so sind die Segmente einander congruent.

2) Der Halbkreis kann sowohl als Segment, als auch als Sector angesehen werden.

3) Je zwei Radien theilen den Kreis in zwei Sektoren, von denen der eine, wofern nicht beide Radien einen Durchmesser bilden, einen concaven, der andere einen convexen Centriwinkel hat.

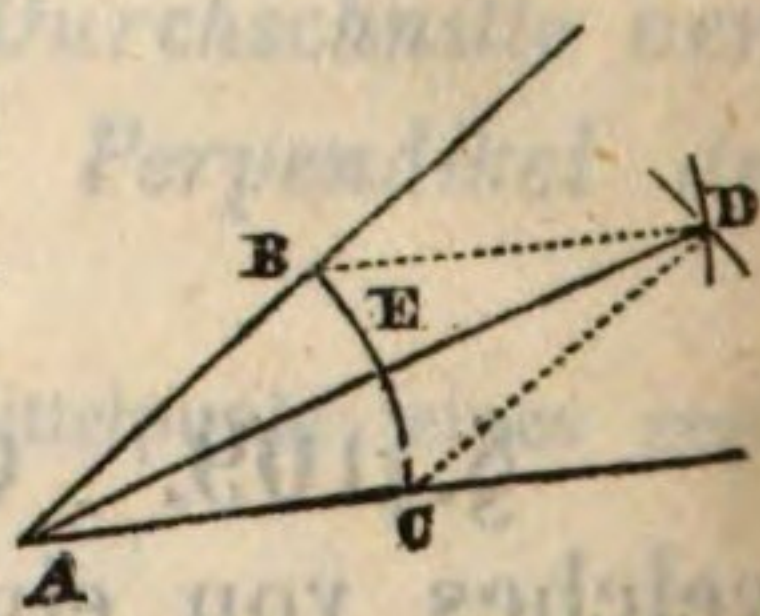
§. 110. *Lehrsätze.* In einem und demselben Kreise oder in mit gleichen Radien beschriebenen, also gleichen, Kreisen gehören:

- 1) zu gleichen Sehnen gleiche (congruente) Kreisbögen;
- 2) zu gleichen Kreisbögen gleiche Sehnen;
- 3) zu gleichen Centriwinkeln gleiche Bögen, Sehnen, Abschnitte und Ausschnitte.

4) Die nach §. 87. den Winkel BAC halbirende Gerade AD halbt auch den Kreisbogen BC in E.

Es ergiebt sich hieraus das Verfahren, wie man einen Kreisbogen halbt.

Die Beweise folgen aus der Congruenz der entsprechenden Ab- und Ausschnitte. Dass die Bögen einander decken wird dadurch erwiesen, dass (nach §. 28^b. 2.) gezeigt wird, dass weder innerhalb noch ausserhalb eines Bogens ein Punkt des andern zu liegen kommen kann.



§. 111. *Lehrsatz.* Jeder Peripheriewinkel ist halb so gross, als der zugehörige Centriwinkel, d. h. derjenige, welcher mit ihm auf gleichem Bogen steht.

Voraus. $\left\{ \begin{array}{l} \angle BMC \text{ ist ein Centriwinkel,} \\ \angle BAC \text{ ein Peripheriewinkel.} \end{array} \right.$

Behaupt. $\angle BAC = \frac{1}{2} \angle BMC$ oder
 $\angle BMC = 2 \angle BAC.$

Beweis. Es sind hier drei Fälle zu unterscheiden:

1. der Mittelpunkt des Kreises liegt auf einem Schenkel des Peripheriewinkels;

2. er liegt zwischen diesen Schenkeln;
 oder endlich

3. er liegt ganz ausserhalb dieser Schenkel.

Im ersten Falle folgt die Richtigkeit der Behauptung aus §. 59. und §. 65. Im 2. und 3. Falle wird der Durchmesser AD gezogen, worauf die Richtigkeit des Satzes aus 1., und bezüglich §. 10. a. und 11. a. folgt.

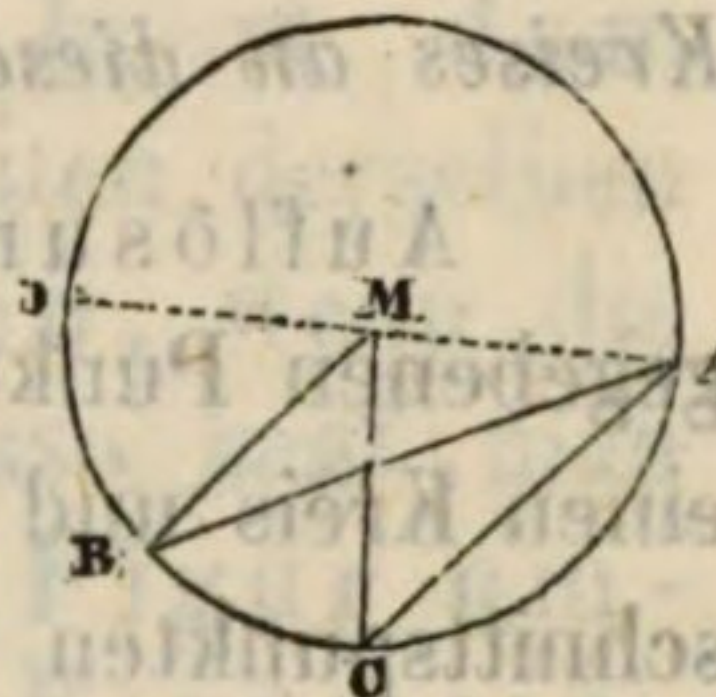
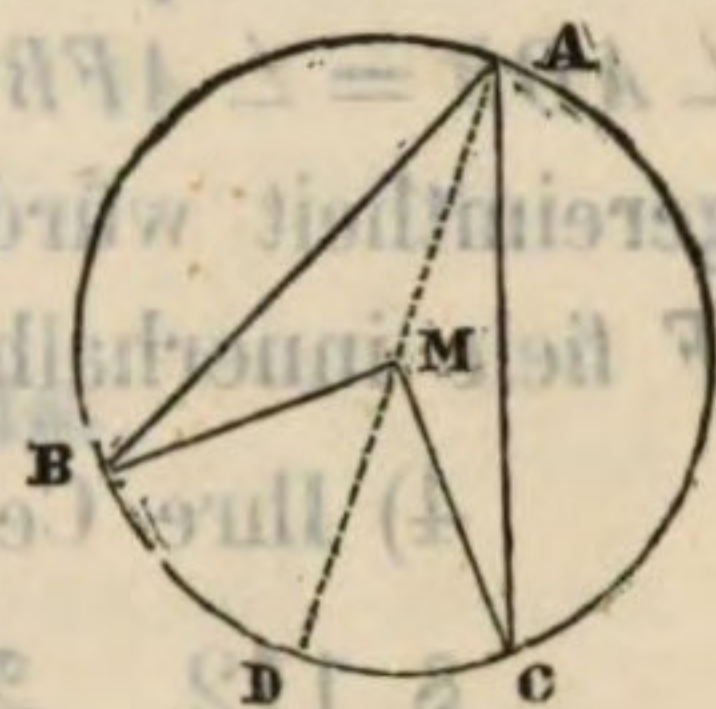
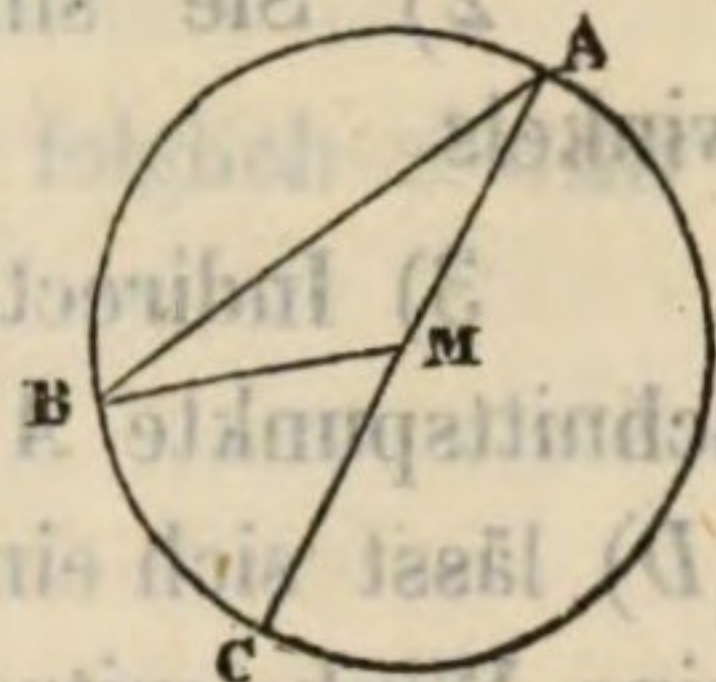
(Obgleich der Satz hier nach der Figur nur für concave Centriwinkel zu gelten scheint, so gilt er doch allgemein für concave und convexe, und es ist auch der Beweis für convexe Centriwinkel kein anderer als der für concave.)

§. 111b. *Zusätze.* 1) Der Peripheriewinkel auf, und also auch in dem Halbkreise ist ein Rechter; sonst sind aber die Peripheriewinkel spitze oder stumpfe, jenachdem der zugehörige Bogen kleiner oder grösser als die halbe Kreislinie ist.

2) Alle Peripheriewinkel auf demselben oder auf gleichen Kreisbögen sind einander gleich; dasselbe gilt von Peripheriewinkeln in demselben oder in gleichen Kreisbögen.

3) Die Scheitel aller gleichen Winkel, deren Schenkel durch zwei feste Punkte gehen, liegen in einer und derselben Kreisperipherie, in welcher die Verbindungslinie jener beiden Punkte eine Sehne ist.

4) Zwei Peripheriewinkel, deren Bögen einander zur Kreisperipherie ergänzen, betragen zusammen genommen 2 Rechte.



Beweis. 1) Der zugehörige Centriwinkel ist ein Gestreckter.

2) Sie sind Hälften desselben Centriwinkels.

3) Indirect. Durch die beiden Durchschnittpunkte A und B und eine Winkelspitze (D) lässt sich ein Kreis beschreiben. Fiele nun eine Winkelspitze F über den Kreis hinaus, so wäre $\angle AGB = \angle ADB = \angle AFB$, was §. 59^b. widerspricht. Auf dieselbe Ungereimtheit würde man kommen, wenn man annehmen wollte, F fiel innerhalb des Kreises.

4) Ihre Centriwinkel ergänzen sich zu $4R$.



§. 112. **Aufgabe.** Von einem Punkte ausserhalb eines Kreises an diesen eine Tangente zu ziehen.

Auflösung. Man schlage über der Verbindungslinie des gegebenen Punkts mit dem Kreismittelpunkte als Durchmesser einen Kreis und verbinde den gegebenen Punkt mit den Durchschnittpunkten beider Kreise. Jede der zuletzt gezogenen Linien ist eine Tangente an den Kreis.

Beweis. Man ziehe an die Durchschnittpunkte beider Kreise im gegebenen Kreise die Radien und wende §. 111^b. 1. an, dann folgt die Richtigkeit des Satzes aus §. 73^b. 2.

§. 112^b. **Zusatz.** Die beiden Tangenten, welche sich von einem Punkte ausserhalb eines Kreises an diesen ziehen lassen, sind einander gleich.

Anmerk. Aus der Congruenz der entstandenen Dreiecke lassen sich noch mehrere Zusätze ableiten.

§. 113. **Lehrsatz.** Der Winkel, welchen eine Tangente mit der an ihren Berührungspunkt gezogenen Sehne macht, ist gleich dem Peripheriewinkel im entgegengesetzten Abschnitte.

Voraus. AB Sehne, AC Tangents, $\angle ADB$ Peripheriewinkel (s. obige Figur.).

Behaupt. $\angle CAB = \angle ADB$.

Beweis. Man ziehe den Durchmesser AE und verbinde B mit E , dann ist $\angle BAE + \angle BEA = R$ nach §. 111^b. 1. Fer-

ner: $\angle CAB + \angle BAE = R$ nach §. 108. 1., folglich $\angle BAE + \angle BEA = \angle CAB + \angle BAE$, und also auch nach §. 11. a.

$\angle BEA = \angle CAB$.

Nun ist aber $\angle BEA = \angle ADB$ nach §. 111b. 2., folglich $\angle CAB = \angle ADB$, w. z. b. w.

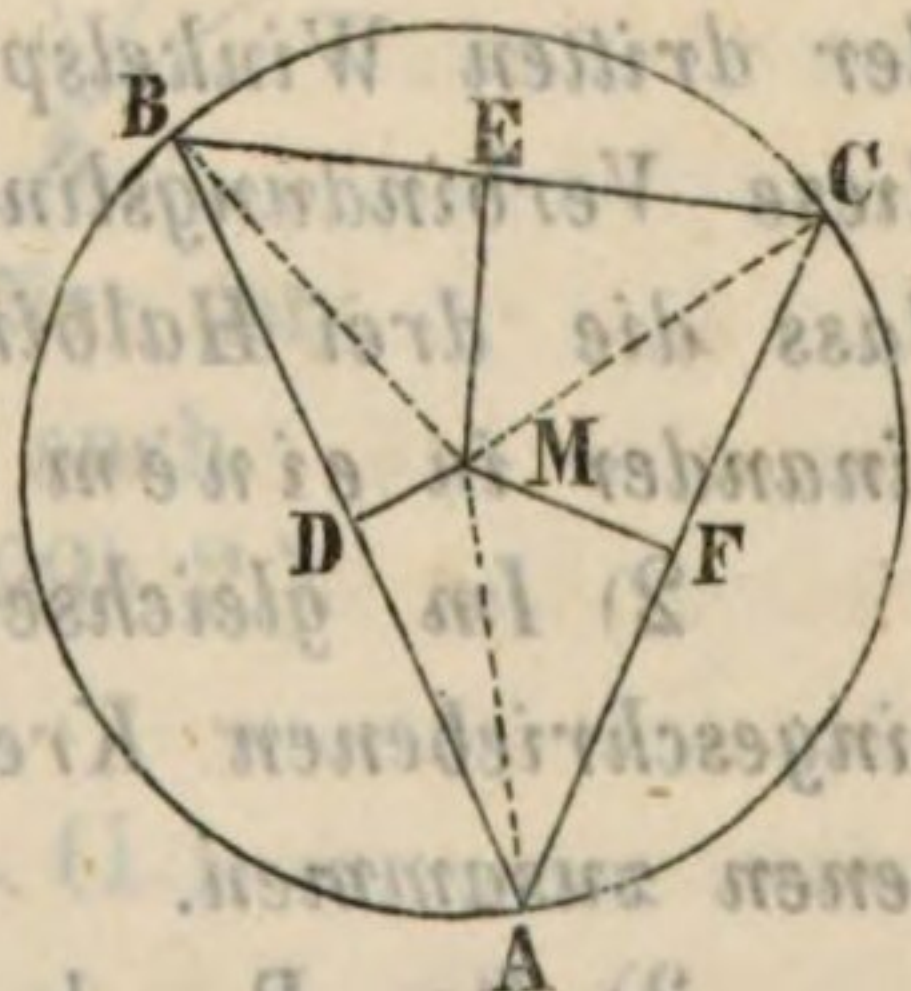
Fünfter Abschnitt.

Figuren in und um den Kreis.

§. 114. **Erklärung.** Eine Figur heisst dem Kreise eingeschrieben, wenn die Seiten derselben Sehnen, und dem Kreise umschrieben, wenn die Seiten Tangenten des Kreises sind. Ebenso sagt man vom Kreise, er sei im ersten Falle der Figur umschrieben, und im zweiten, er sei der Figur eingeschrieben.

Ein eingeschriebenes Viereck nennt man gewöhnlich ein Kreisviereck, besser Sehnenviereck, ein umschriebenes ein Tangentenviereck. Ein Kreisvieleck wird man passend ein solches nennen, das für einen Kreis ein Sehnenvieleck und für einen zweiten ein Tangentenvieleck ist.

§. 115. **Lehrsatz.** Wenn man in den Mittelpunkten zweier Seiten eines Dreiecks auf diesen Lothe errichtet und vom Durchschnittspunkte der letztern aus mit dem Abstände dieses Punkts von einer Winkelspitze des Dreiecks als Radius einen Kreis beschreibt, so ist dieser dem Dreiecke umschrieben.



Beweis. Folgt aus §. 106.

§. 116. **Zusätze.** 1) Die drei Lothe, welche in den Mittelpunkten der Seiten auf diesen senkrecht stehen, schneiden

einander in einem Punkte und zwar im Mittelpunkte des umschriebenen Kreises.

2) Der Durchschnittspunkt der Lothe, welche in den Mittelpunkten der drei Seiten eines Dreiecks auf diesen errichtet sind, hat von den Winkelspitzen des Dreiecks gleiche Abstände.

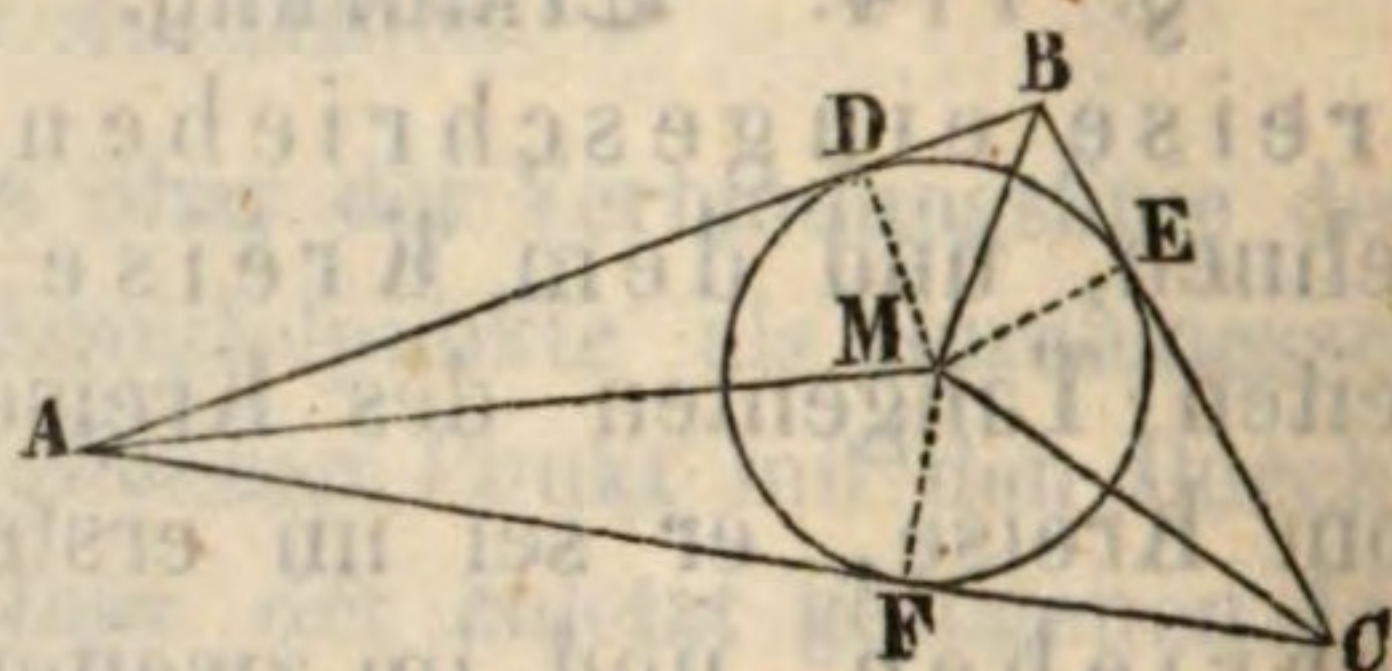
Es ist $AM = BM = CM$.

Anmerk. Wird der Mittelpunkt des dem Dreieck umschriebenen Kreises immer innerhalb des Dreiecks liegen? Wo wird er beim rechtwinkligen Dreiecke liegen? Wo beim stumpfwinkligen?

§. 117. *Satz.* Wenn man zwei Winkel eines Dreiecks halbiert, und aus dem Durchschnittspunkte der Halbirenden mit dessen Abstände von einer der drei Seiten einen Kreis beschreibt, so ist dieser dem Dreiecke eingeschrieben.

Beweis. Man beweist, dass $MD = ME = MF$, was daraus folgt, dass $\triangle ADM \cong \triangle AMF$ ist (§. 64b.) und $\triangle BDM \cong \triangle BEM$. Aus der Gleichheit der Lothe folgt

dann, dass der mit einem derselben aus M beschriebene Kreis durch D , E und F gehen muss. Da nun $DM \perp AB$, $EM \perp BC$ und $FM \perp AC$, so sind die Seiten des Dreiecks Tangenten an den Kreis und folglich der letztere dem Dreiecke eingeschrieben, w. z. b. w.



§. 118. *Zusätze.* 1) Wenn man den Durchschnittspunkt der Halbierungslinien zweier Winkel im Dreiecke mit der dritten Winkelspitze verbindet, so wird der Winkel durch diese Verbindungslinie ebenfalls halbiert, und hieraus folgt, dass die drei Halbierungslinien der drei Winkel im Dreieck einander in einem Punkte schneiden.

2) Im gleichseitigen Dreiecke fällt der Mittelpunkt des eingeschriebenen Kreises mit dem Mittelpunkte des umschriebenen zusammen.

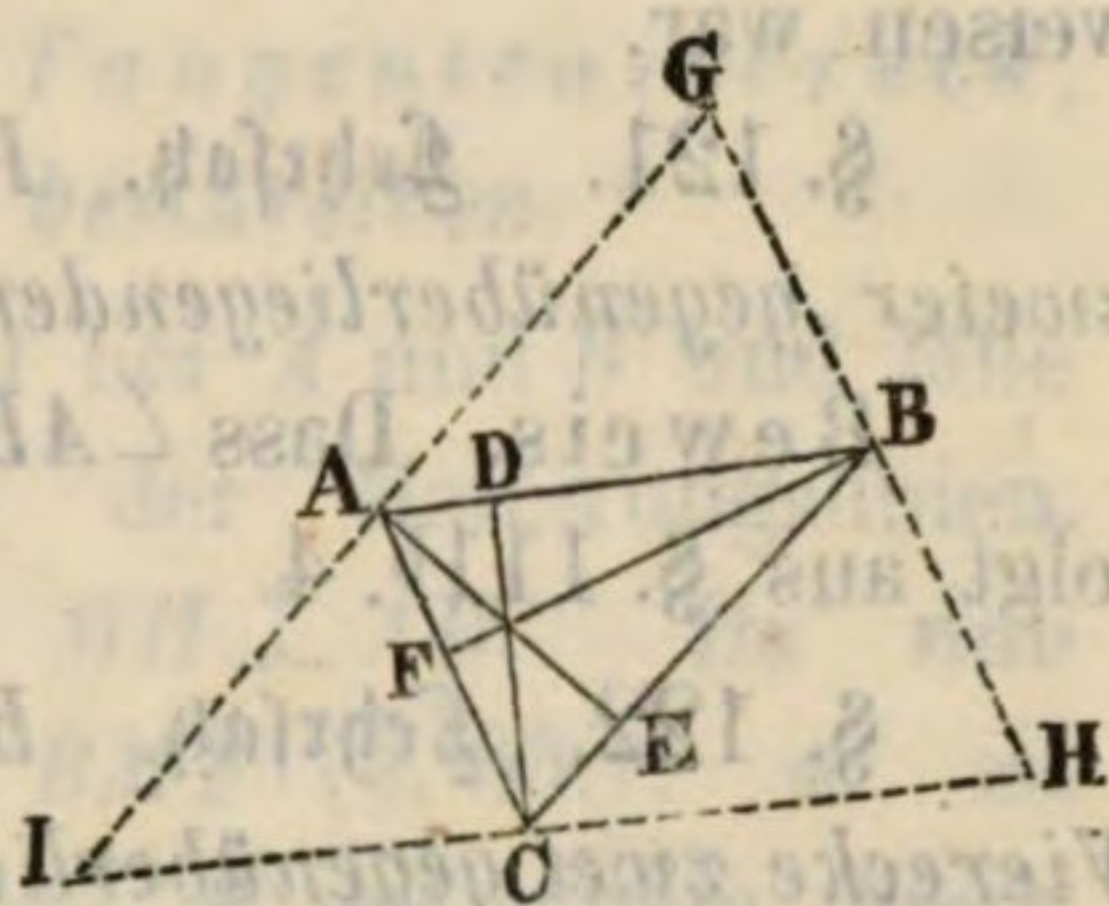
3) Der Durchschnittspunkt der Halbierungslinien zweier Aussenwinkel eines Dreiecks steht von den Verlängerungen der zwei Seiten und von der dritten Seite gleich weit ab. Ein von diesem Punkte mit einem der Abstände beschriebener Kreis

wird demnach die beiden Seitenverlängerungen und die dritte Seite berühren.

Anmerk. Ausser den Halbierungslinien der drei Winkel und den in den Mittelpunkten der Seiten auf diesen errichteten Lothen haben auch die drei Höhen eines Dreiecks einen gemeinschaftlichen Durchschnittspunkt und ebenso die von den Winkelspitzen nach den Mittelpunkten der Gegenseiten gezogenen Transversalen. Es dürften wohl die Beweise für die betreffenden Lehrsätze hier am rechten Orte sein.

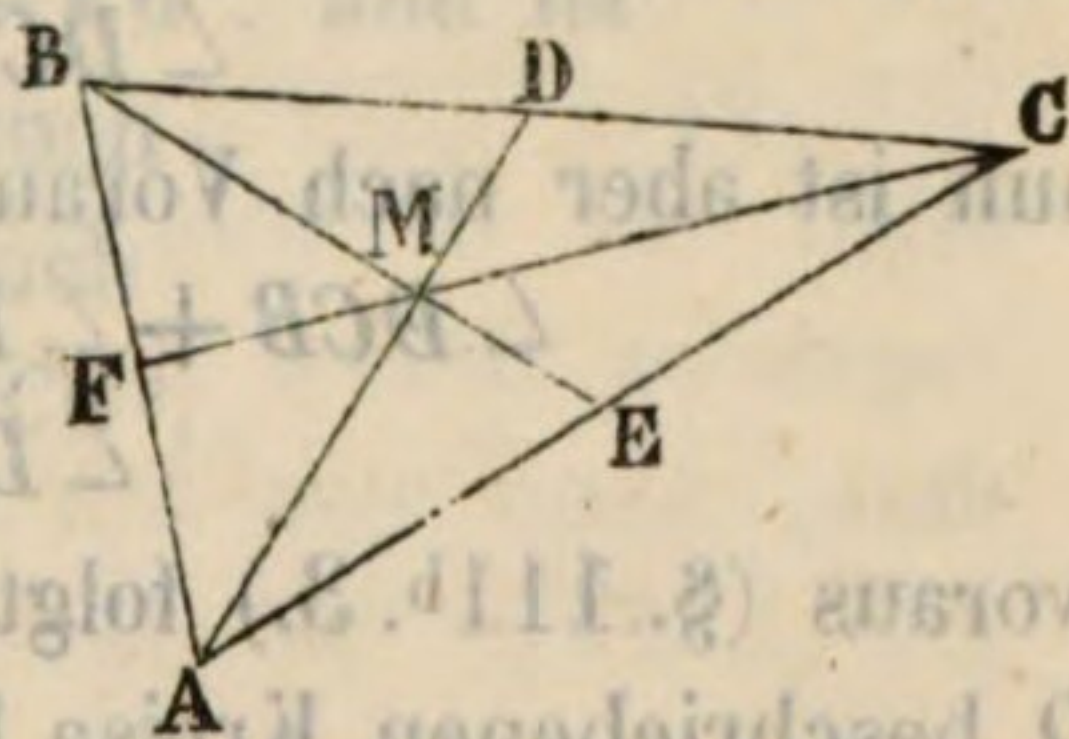
§. 119. Die drei Höhen eines Dreiecks schneiden einander in einem Punkte.

Beweis. Man ziehe $GH \parallel AC$, $HI \parallel AB$ und $GI \parallel BC$, dann ist $AG = BC = AI$, $CH = AB = CI$ und $BG = AC = BH$ als Gegenseiten in Parallelogrammen; folglich sind A , B und C bezüglich die Mittelpunkte der drei Seiten des neu entstandenen Dreiecks GHI . Nun ist aber offenbar $AE \perp GI$, $BF \perp GH$ und $CD \perp HI$, folglich schneiden diese einander (§. 116.) in einem und demselben Punkte.



§. 120. Die drei Transversalen von den Winkelspitzen nach den Mittelpunkten der drei Seiten eines Dreiecks schneiden einander in einem Punkte.

Beweis. Ist M der Durchschnittspunkt der nach den Mittelpunkten von BC und AC gezogenen Transversalen AD und BE , so ist nur zu beweisen, dass die durch M an AB gezogene Transversale CF ebenfalls die dritte Seite AB halbt. — Nun ist:



$$\triangle ABD = \triangle ACD \text{ und auch}$$

$$\triangle MBD = \triangle MCD \text{ (§. 99b. 2.).}$$

Durch Subtraction erhält man

$$\triangle AMB = \triangle AMC \dots (1.)$$

Ferner ist aus ähnlichen Gründen:

$$\triangle BAE = \triangle BCE \text{ und}$$

$$\triangle MAE = \triangle MCE, \text{ woraus durch Subtraction}$$

$$\triangle AMB = \triangle CMB \dots (2.)$$

erhalten wird. Die Vergleichung von (1.) und (2.) giebt:

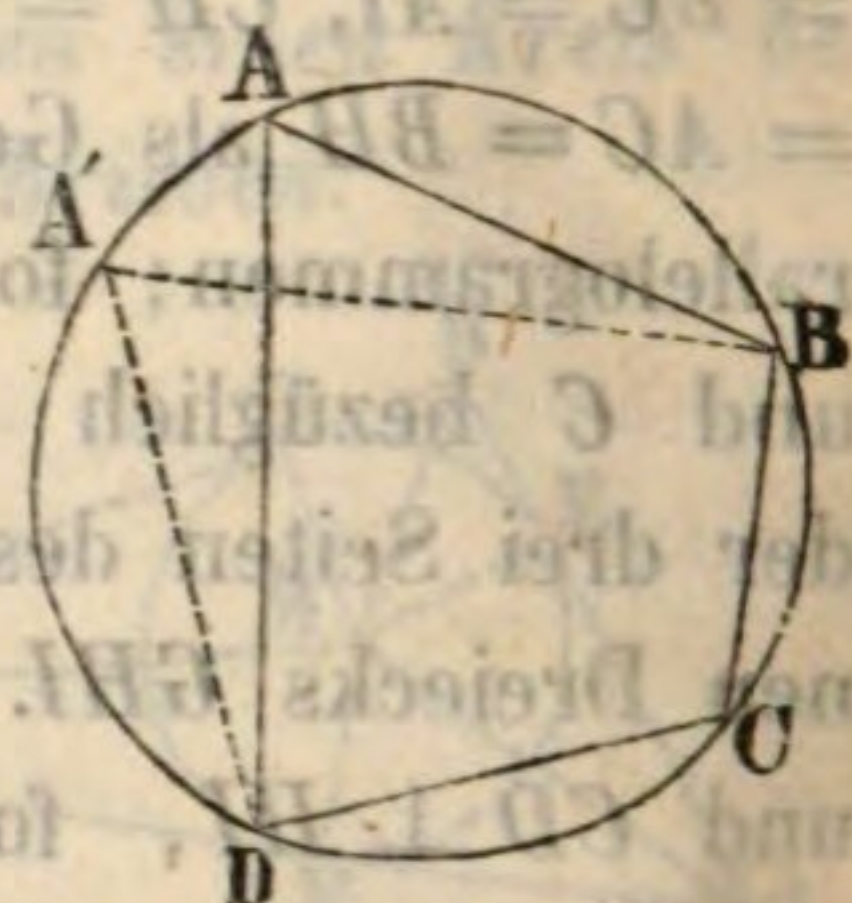
$$\triangle AMC = \triangle CMB.$$

Diese beiden Dreiecke haben offenbar in Bezug auf MC als Grundlinie gleiche Höhen (§. 99b. 10.), welche Höhen aber auch den Dreiecken BFC und AFC in Bezug auf FC als Grundlinie angehören müssen, woraus dann folgt, dass auch $\triangle BFC = \triangle AFC$. Nun haben aber diese Dreiecke offenbar auch in Bezug auf BF und AF als Grundlinien gleiche Höhen, folglich muss (§. 99b. 10.) $BF = AF$ sein; was, wie wir ansehen, nur zu beweisen war.

§. 121. *Lehrsatz.* In jedem Sehnenvierecke ist die Summe zweier gegenüberliegenden Winkel jederzeit gleich zwei Rechten.

Beweis. Dass $\angle ABC + \angle ADC = 2R$, folgt aus §. 111b. 4.

§. 122. *Lehrsatz.* Betragen in einem Vierecke zwei gegenüberliegende Winkel zusammen zwei Rechte, so ist es ein Sehnenviereck, d. h. es lässt sich um dasselbe ein Kreis beschreiben.



Beweis. Beschreibt man nämlich durch drei Winkelspitzen B , C und D (§. 106.) einen Kreis und construirt einen Peripheriewinkel $DA'B$, welcher auf dem Bogen BCD steht, so ist (§. 121.):

$$\angle DCB + \angle DA'B = 2R;$$

nun ist aber nach Voraussetzung auch

$$\angle DCB + \angle DAB = 2R, \text{ folglich ist}$$

$$\angle DA'B = \angle DAB;$$

woraus (§. 111b. 3.) folgt, dass auch A in dem durch B , C und D beschriebenen Kreise liegt.

§. 123. *Zusätze.* 1) Um jedes Quadrat oder Rechteck lässt sich ein Kreis beschreiben, um jedes andere Parallelogramm aber nicht.

2) Wenn man die Winkel eines ganz beliebigen Vierecks halbiert und die Halbierungslinien bis zum gegenseitigen Durchschnitte verlängert, so bilden dieselben ein Sehnenviereck.

§. 124. *Lehrsatz.* Im umschriebenen Vierecke (Tangentenvierecke) ist die Summe zweier gegenüberliegenden Seiten gleich der Summe der beiden andern.

Beweis. Es ist:

$$AE = AH$$

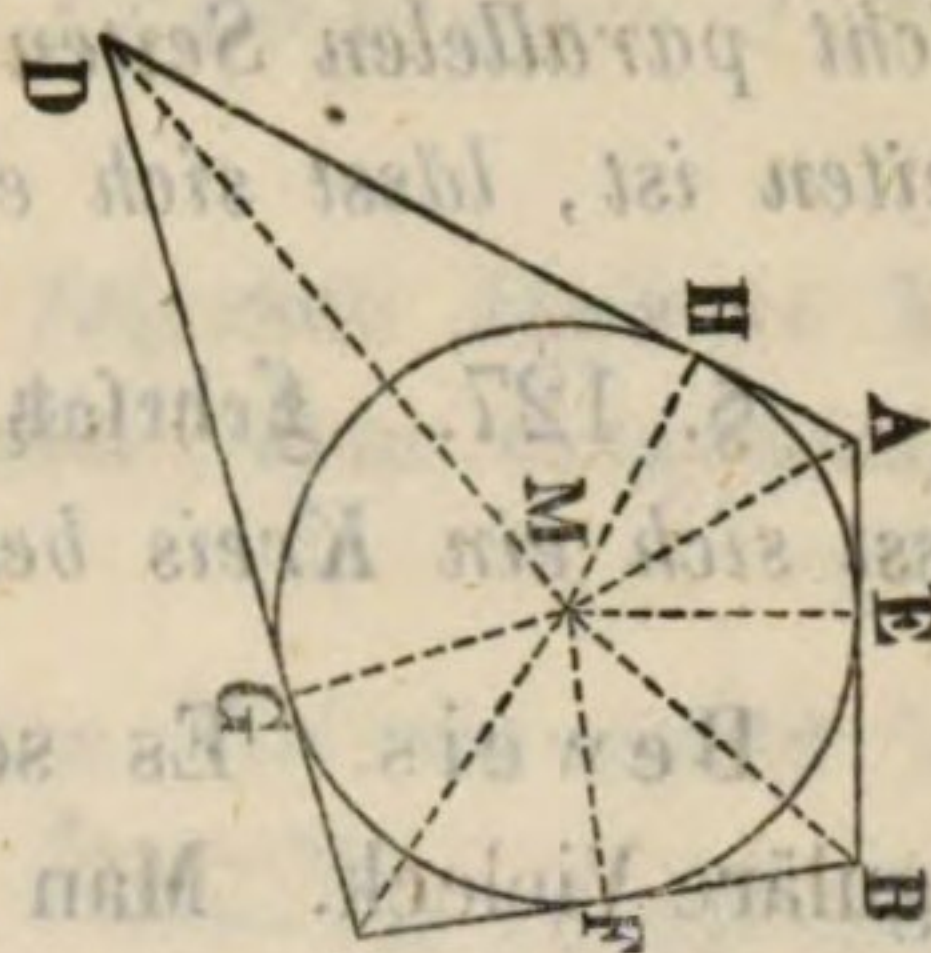
$$EB = BF$$

$$DG = DH$$

$$GC = CF \text{ (§. 112b.)}$$

$$AB + DC = AD + CB \text{ (§. 10. a.)}$$

w. z. b. w.



§. 125. *Lehrsatz.* Wenn in einem Vierecke die Summe zweier Gegenseiten der Summe der beiden andern gleich ist, so ist es ein Tangentenviereck, d. h. es lässt sich in dasselbe ein Kreis beschreiben.

Beweis. Man halbire die Winkel bei A und B und fälle von M, als dem Durchschnittspunkte der Halbirungslinien, die Lothe $ME \perp AB$, $MF \perp BC$ und $MH \perp AD$. Da nun $\triangle AMH \cong \triangle AEM$ und $\triangle EMB \cong \triangle BMF$ (§. 63.), so ist $MH = ME = MF$. Es wird also der von M mit einem dieser Perpendikel beschriebene Kreis die drei Seiten AD, AB und BC bezüglich in H, E und F berühren. Nun folgt aus der Voraussetzung leicht, dass $HD + FC = DC$; macht man deshalb $DG = HD$, so ist auch $CG = CF$.

Es ist nun

$$MH^2 = MD^2 - HD^2 = MD^2 - DG^2 \text{ und}$$

$$MF^2 = MC^2 - CF^2 = MC^2 - CG^2, \text{ und da}$$

$$MH = MF, \text{ und so auch}$$

$$MH^2 = MF^2, \text{ so ist auch}$$

$$MD^2 - DG^2 = MC^2 - CG^2,$$

woraus (§. 104b.2.) folgt, dass

$$MG \perp DC \text{ ist.}$$

Da aber $MG^2 = MD^2 - DG^2 = MH^2$, so ist auch $MG = MH$ und also $ME = MF = MG = MH$. Es muss demnach die aus M beschriebene Kreislinie auch durch den Punkt G gehen und zwar die Seite DC in diesem Punkte berühren, d. h. der Kreis ist dem Vierecke eingeschrieben, w. z. b. w.

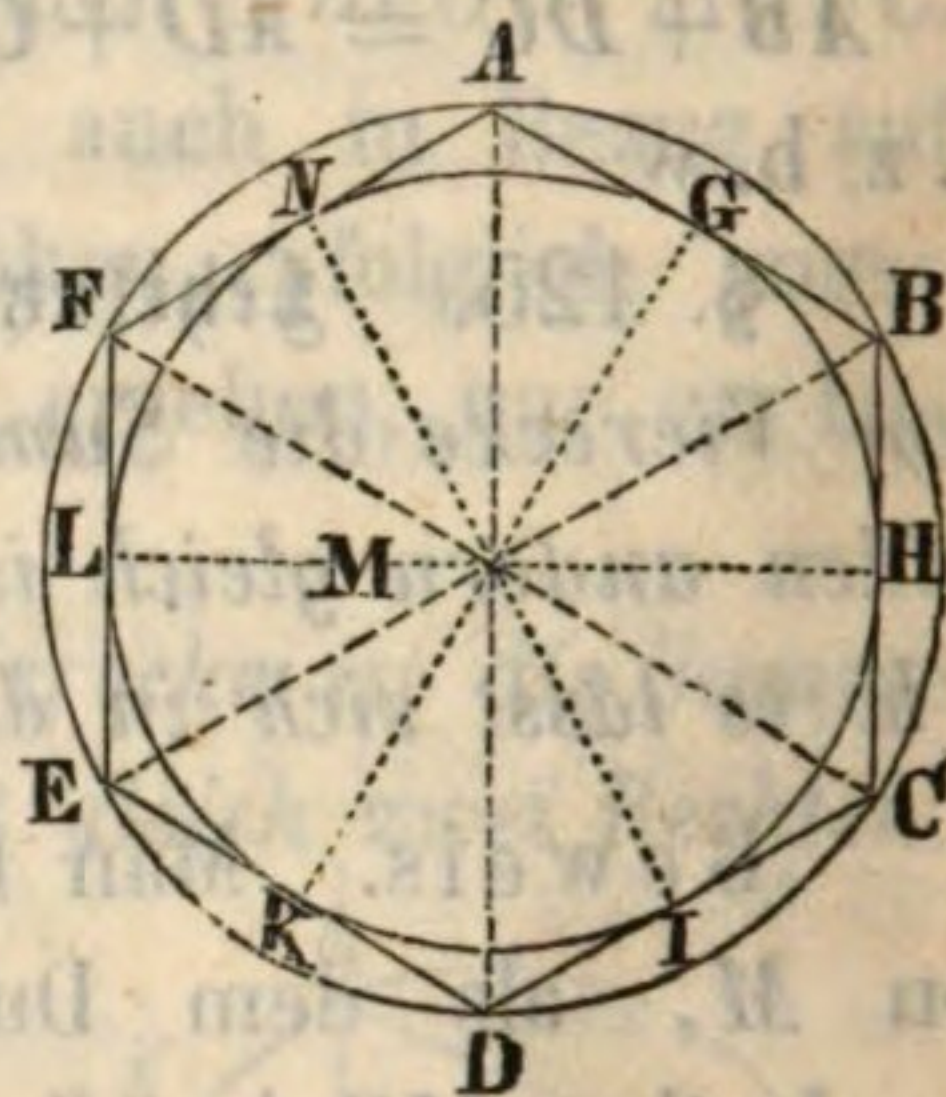
§. 126. *Zusätze.* 1) In jedes Quadrat und jeden Rhombus lässt sich ein Kreis beschreiben, in andere Parallelogramme aber nicht.

2) In jedes Antiparallelogramm, in welchem eine der

nicht parallelen Seiten gleich der halben Summe der parallelen Seiten ist, lässt sich ein Kreis beschreiben.

§. 127. **Satz.** Um und in jedes reguläre Vieleck lässt sich ein Kreis beschreiben.

Beweis. Es sei $ABCDEF$ das reguläre Vieleck. Man halbiere die Polygonwinkel (§. 89^b. 3.) bei A und bei B , verlängere die Halbierungslinien bis zu ihrem Durchschnitte in M , dann ist M der Mittelpunkt und AM (oder BM) der Radius des umschriebenen Kreises. Man ziehe ausserdem CM , DM , EM , FM und erweise die Gleichheit dieser



Linien mit AM und BM , was leicht durch Congruenz der Dreiecke AMB , BMC u. s. w. geschieht. Zunächst ist $\triangle AMB \cong \triangle BMC$; denn es ist $BM = BM$, $AB = BC$ und $\angle ABM = \angle CBM$ nach Construction. Nun ist aber $\triangle ABM$ gleichschenkelig, weil die Polygonwinkel, und folglich auch ihre Hälften gleich sind. Daraus folgt, dass $\angle MBA$, und folglich auch $\angle MBC$, die Hälfte des Polygonwinkels ist, und ferner, dass $AM = BM = CM$. Ganz auf dieselbe Weise lässt sich nun erweisen, dass $\triangle BMC \cong \triangle CMD$ u. s. w. jedes folgende Dreieck $\cong$ dem vorhergehenden ist, woraus dann $AM = BM = CM = DM = EM = FM$ folgt. Da in congruenten Dreiecken (§. 63.) auch die gleichliegenden Höhen gleich sind, so folgt aus dem Vorhergehenden, dass, wenn man $GM \perp AB$, $HM \perp BC$, $IM \perp CD$, $KM \perp DE$, $LM \perp EF$, $NM \perp FA$ zieht, auch $GM = HM = IM = KM = LM = NM$ und folglich M auch der Mittelpunkt des eingeschriebenen Kreises und eine dieser Höhen sein Radius ist.

§. 128. **Erklärung.** Man nennt den Mittelpunkt des um und in ein reguläres Vieleck beschriebenen Kreises auch den Mittelpunkt des regulären Vielecks und den Radius des erstern Kreises den grössern, und den des zweiten Kreises den kleinern Radius des Vielecks. Der von zwei aufeinander folgenden grösseren Radien eingeschlossene

Winkel heisst Centriwinkel des regulären Vielecks.

Zusätze. 1) Zwei aufeinander folgende kleinere Radien schliessen einen Winkel ein, welcher dem Centriwinkel des regulären Vielecks gleich ist.

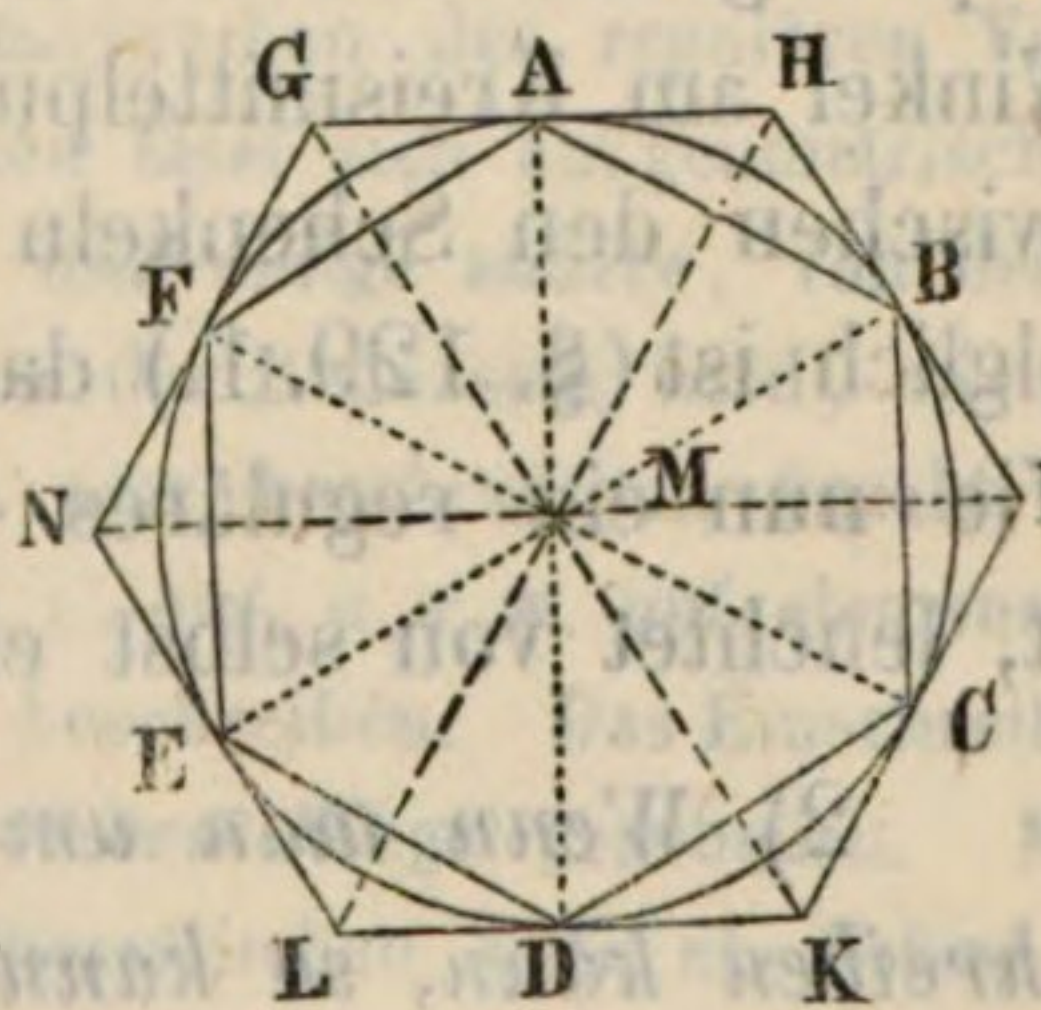
2) Der Centriwinkel eines regulären Vielecks von n Seiten ist $\frac{4}{n} R$, und der Polygonwinkel $= \frac{2n-4}{n} R$ (§. 89b. 3.).

§. 129. *Lehrsätze.* 1) Wenn die Peripherie eines Kreises in eine beliebige Anzahl gleicher Theile getheilt ist, und die zu den gleichen Kreisbögen gehörigen Sehnen der Reihe nach gezogen werden, so bilden die letzteren ein reguläres, dem Kreise eingeschriebenes Vieleck (ein Sehnenvieleck).

Beweis. Dass das Vieleck dem Kreise eingeschrieben ist, folgt unmittelbar aus der Construction; es bleibt nur noch zu beweisen, dass es ein reguläres ist, d. h. also, dass seine Seiten und Winkel bezüglich unter einander gleich sind. Erstes folgt aus §. 110. 2. Die Gleichheit der Winkel folgt aus §. 111b. 2. Jeder Winkel steht nämlich in einem Bogen, der aus zweien der gleichen Bogentheile besteht.

2) Werden durch die Theilungspunkte der Kreisbögen Tangenten gezogen und je zwei aufeinander folgende bis zum gegenseitigen Durchschnitte verlängert, so bilden diese ein reguläres dem Kreise umschriebenes Vieleck (ein Tangentenvieleck).

Beweis. Dass das umschriebene Vieleck $GHIKLN$ ein reguläres ist, d. h. dass es gleiche Seiten und Winkel hat, folgt aus der Congruenz der Dreiecke GMA , AMH , HMB , BMI , IMC , CMK , KMD , DML , LME , EMN , NMF , FMG . Es ist nämlich $AH = BH$ (§. 112b.), $MH = MH$, $AM = BM$, folglich $\triangle AHM \cong \triangle BHM$, folglich $\angle AMH = \angle BMH$. Dasselbe findet statt mit den an MI , MK u. s. w. liegenden Dreiecken. Nun ist $\angle AMB = \angle BMC$ (auf gleichen Bögen), folglich $\angle HMB = \angle IMB$ (als Hälften gleicher Winkel), so dass jetzt auch $\triangle HMB \cong \triangle BMI$



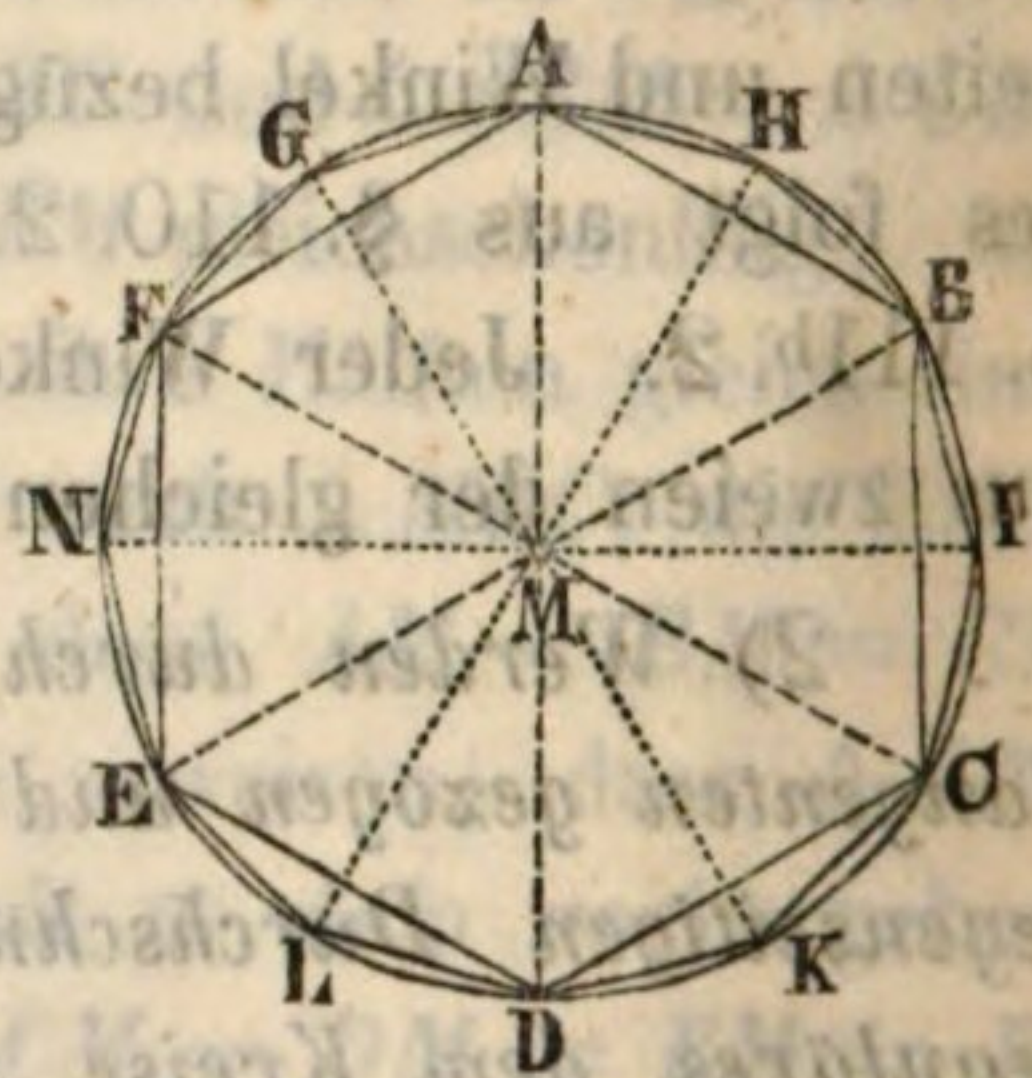
und mithin die Congruenz sämtlicher vorgenannter Dreiecke erwiesen ist. Hieraus folgt aber die Gleichheit der Hälften aller Seiten und auch der Winkel des Tangentenvielecks, und mithin auch die Gleichheit der ganzen Seiten und Winkel. Das Vieleck ist also regulär.

§. 130. *Zusätze.* 1) Wenn man die Endpunkte zweier senkrechten Durchmesser im Kreise durch Sehnen verbindet, so entsteht ein eingeschriebenes reguläres Viereck (Quadrat).

2) Werden durch genannte Endpunkte Tangenten gezogen bis zum gegenseitigen Durchschnitte, so entsteht ein umschriebenes reguläres Viereck (Quadrat).

§. 181. *Lehrsätze.* Wenn man in einen Kreis ein n -eck beschreiben kann, so kann man auch ein $2n$ -eck und folglich auch ein $4n$ -eck, $8n$ -eck, $16n$ -eck, $32n$ -eck u. s. w. einschreiben.

Beweis. Halbirt man die zu den Seiten AB, BC, CD, DE, EF, FA gehörigen Centriwinkel $AMB, BMC, CMD, DME, EMF, FMA$ oder (§. 110. 4.) die zugehörigen Bögen und verbindet die Durchschnittspunkte der Halbirenden und der Peripherie mit den benachbarten Winkelspitzen des Vielecks, so hat das neu entstandene Vieleck doppelt so viel Seiten als das ursprüngliche und ist ebenfalls regulär. Denn da die einfachen Winkel am Kreismittelpunkte alle gleich sind, so sind auch die zwischen den Schenkeln derselben liegenden Bögen gleich und folglich ist (§. 129. 1.) das entstandene $2n$ -eck ebenfalls regulär. Wie nun ein reguläres $4n$ -eck, $8n$ -eck u. s. w. einzuzeichnen ist, leuchtet von selbst ein.



2) Wenn man um einen Kreis ein reguläres n -eck beschreiben kann, so kann man auch ein $2n$ -eck, $4n$ -eck, $8n$ -eck, $16n$ -eck u. s. w. umschreiben.

Beweis. Halbirt man beim umschriebenen n -eck ebenfalls die Winkel am Mittelpunkte, zieht durch die Durchschnittspunkte der Halbirenden und der Peripherie Tangenten bis zum

Durchschnitte mit den benachbarten Seiten, so entsteht nach §. 130. ein reguläres $2n$ -eck.

§. 132. *Zusätze.* 1) *Lässt sich in oder um einen Kreis ein reguläres Vieleck von gerader Seitenzahl beschreiben, so lässt sich auch ein Vieleck von halber Seitenzahl bezüglich ein- und umschreiben.*

2) *Da sich in und um jeden Kreis ein reguläres Viereck beschreiben lässt (§. 130.), so lassen sich sowohl in als um den Kreis auch ein reguläres 8-eck, 16-eck, 32-eck u. s. w. beschreiben.*

§. 133. *Lehrsatz.* *Die Seite des in den Kreis eingeschriebenen Sechsecks ist gleich dem Radius.*

Beweis. Sei (s. v. Fig.) $ABCDEF$ ein dem Kreise eingeschriebenes Sechseck, so ziehe man an die Winkelspitzen desselben Radien; dann sind die Winkel am Mittelpunkte gleich, nämlich:

$\angle AMB = \angle BMC = \angle CMD = \angle DME = \angle EMF = \angle FMA$,
und jeder (§. 128. 2.) $= \frac{2}{3}R$; hieraus folgt, dass die entstandenen 6 Dreiecke sämtlich gleichseitig und folglich die Seiten des Sechsecks gleich dem Radius sind.

§. 134. *Zusätze.* 1) *Um jeden Kreis lässt sich (§. 129. 2.) ein reguläres Sechseck beschreiben.*

2) *In und um jeden Kreis lassen sich ausser den vorgenannten regulären Figuren (§. 131.) ein 12-eck, 24-eck u. s. w. beschreiben.*

Anmerk. Ausser den durch Ein- und Umschreiben des regulären Vierecks und Sechsecks noch möglichen Vielecken lässt sich auf geometrischem Wege noch das reguläre Fünfeck, Zehneck und einige andere, von denen nach den Proportionen beim Kreise die Rede sein wird, in und um den Kreis beschreiben. Ausser dieser sehr beschränkten Anzahl von Vielecken aber lässt sich nur noch das 17-eck u. s. w. auf elementargeometrischem Wege in und um den Kreis beschreiben. Das Einschreiben anderer als dieser kann nur auf mechanischem Wege geschehen. Man probirt nämlich das Eintragen einer muthmasslichen Seite als Sehne so lange, bis die Zirkelspitze bei vollendeter Eintragung wieder in den ersten Einsatzpunkt trifft.

Die gewöhnlichste Art die Kreislinie einzutheilen, ist die in 360 Theile oder sogenannte Grade. Jeder Grad wird wieder in 60 Minuten, die Minute in 60 Secunden, die Secunde in 60 Tertien eingetheilt. Man be-

zeichnet einen Winkel z. B. von 23 Graden 15 Minuten 37 Sekunden 12 Tertian durch $23^{\circ} 15' 37'' 12'''$. Da zu gleichen Bögen gleiche Centriwinkel gehören, und da, wenn man die Theilungspunkte mit dem Mittelpunkt verbindet, die $4R$ um den Mittelpunkt herum ebenfalls in 360 gleiche Theile getheilt werden, so dehnt man die Bezeichnungsweise durch Grade, Minuten u. s. w. auch auf die Winkel aus und nennt auch den 360sten Theil von $4R$ oder den 90sten von $1R$ einen Grad u. s. w. (Die Erklärung der verschiedenen winkelmessenden Instrumente, wie des Transporteurs, Astrolabiums, der Boussole, des Reflexionsgoniometers, Winkelspiegels, Spiegeldiopters, der Krenzscheibe u. s. w., sowie deren Anwendung dürfte wohl hier am geeignetsten Orte sein. Wir verweisen hier auf unsere Schrift: „Grundzüge der Feldmesskunde“, in welcher sich die Zeichnung, die Einrichtung und der Gebrauch der geodätischen Instrumente angegeben findet.)

Anhang,

enthaltend Materialien zur Uebung für Schüler.

Erstes Kapitel.

Lehrsätze.

1) Errichtet man im Scheitel eines Winkels auf dessen Schenkeln Lothe, welche auf entgegengesetzten Seiten der letzteren liegen, so schliessen dieselben einen Winkel ein, welcher gleich dem Nebenwinkel des ursprünglichen ist.

2) Die Halbirungslinien zweier Nebenwinkel stehen aufeinander senkrecht.

3) Errichtet man auf einer Geraden auf einer Seite beliebig viel gleiche Lothe, so liegen deren Endpunkte sämmtlich in einer der ursprünglichen Geraden parallelen Geraden.

4) Halbirt man den Aussenwinkel eines gleichschenkligen Dreiecks an der Spitze, so ist die Halbirungslinie der Grundlinie parallel.

5) Die zu den Schenkeln eines gleichschenkligen Dreiecks gehörigen Höhen sind von gleicher Grösse.

6) Wie heisst die Umkehrung dieses Satzes?

7) Die Verbindungslinie der Fusspunkte vorgenannter Höhen ist der Grundlinie parallel.

8) Wenn man auf den Seiten eines gleichseitigen Dreiecks von den Winkelspitzen aus beliebige, aber gleiche Stücke gleichmässig abschneidet, und diese Durchschnittspunkte unter einander verbindet, so entsteht wieder ein gleichseitiges Dreieck.

9) Trägt man von den Endpunkten der Grundlinie eines gleichschenkligen Dreiecks einerseits auf dem Schenkel, andererseits auf dessen Verlängerung bezüglich gleiche Stücke ab, so wird die Verbindungslinie der Abtragungspunkte durch die Grundlinie des Dreiecks halbirt.

10) Die Summe der Abstände eines Punktes innerhalb eines gleichseitigen Dreiecks von den Seiten ist gleich der Höhe des letzteren.

11) Schneidet man auf der Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks von jedem ihrer Endpunkte aus die anliegende Kathete ab, so schliessen die Verbindungslinien der Abtragungspunkte mit der Spitze des rechten Winkels stets einen halben rechten Winkel ein.

12) Verlängert man die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks über jeden ihrer Endpunkte hinaus um die anstossende Kathete, so schliessen die Verbindungslinien der Abtragungspunkte mit der Spitze des rechten Winkels $\frac{3}{2}R$ ein.

13) Wenn man auf der grössten Seite eines ungleichseitigen Dreiecks von jedem ihrer Endpunkte aus ein Stück abschneidet, gleich der anliegenden kleinern Seite, und diese Durchschnittspunkte mit der Spitze des Gegenwinkels verbindet, so ist der Winkel, den diese beiden Linien mit einander bilden, so gross als die halbe Summe der beiden kleinern Dreieckswinkel.

14) Wenn man auf der grösseren von zwei ungleichen Dreiecksseiten von ihrem gemeinschaftlichen Endpunkte aus ein Stück abschneidet, welches gleich ist der kleinern, und diesen Durchschnittspunkt mit der Spitze des Gegenwinkels verbindet, so ist der Winkel, welchen diese mit der dritten Dreiecksseite bildet, gleich dem halben Unterschiede der beiden Dreieckswinkel, welche den andern Dreiecksseiten gegenüberliegen.

15) Ist in einem rechtwinkligen Dreiecke der eine spitze Winkel halb so gross als der andere, so ist die kleinere der beiden Katheten gleich der Hälfte der Hypotenuse.

16) Auch die Umkehrung dieses Satzes ist richtig.

17) Wenn man die Mittelpunkte der Seiten eines Parallelogramms verbindet, so entsteht stets wieder ein Parallelogramm.

18) Wenn man die Mittelpunkte der Seiten eines Antiparallelogramms verbindet, so entsteht stets ein Rhombus.

19) Ist die Höhe eines Antiparallelogramms das arithmetische Mittel (vergl. §. 97.) zwischen den parallelen Seiten, so bestimmen die Mittelpunkte der vier Seiten die Endpunkte eines Quadrats.

20) Verbindet man in einem Parallelogramm die Mittelpunkte zweier Gegenseiten mit den Endpunkten einer Diagonale, so wird durch diese Verbindungslinien die andere Diagonale in drei gleiche Stücke getheilt.

21) Halbirt man in einem Rhombus die Winkel, welche die Diagonalen bilden, so bestimmen die vier Durchschnittspunkte dieser Halbirenden mit dem Umfange die Eckpunkte eines Quadrats.

22) Zwei rechtwinklige Dreiecke sind congruent, wenn die Summe der beiden Katheten und die Hypotenuse einzeln gleich sind.

23) Zwei rechtwinklige Dreiecke sind congruent, wenn die Summe beider Katheten und ein spitzer Winkel einzeln gleich sind.

24) Zwei rechtwinklige Dreiecke sind congruent, wenn eine Kathete und die Summe der beiden andern Seiten einzeln gleich sind.

25) Zwei rechtwinklige Dreiecke sind congruent, wenn die Summe der Hypotenuse und einer Kathete und ein spitzer Winkel einzeln gleich sind.

26) Zwei rechtwinklige Dreiecke sind congruent, wenn die zur Hypotenuse gehörige Höhe und ein spitzer Winkel einzeln gleich sind.

27) Zwei rechtwinklige Dreiecke sind congruent, wenn die zur Hypotenuse gehörige Höhe und eine Kathete einzeln gleich sind.

28) Zwei gleichseitige Dreiecke sind congruent, wenn ihre Höhen in beiden gleich sind.

29) Zwei gleichschenklige Dreiecke sind congruent, wenn die Summe der Schenkel und der Winkel an der Spitze einzeln gleich sind.

30) Zwei gleichschenklige Dreiecke sind congruent, wenn die Summe der Schenkel und der Grundlinie, sowie der Winkel an der Spitze einzeln gleich sind.

31) Zwei gleichschenklige Dreiecke sind congruent, wenn die Differenz zwischen der Schenkelsumme und der Grundlinie, sowie der Winkel an der Spitze einzeln gleich sind.

32) Der Abstand des Mittelpunktes der Grundlinie eines gleichschenkligen Dreiecks von einem Schenkel ist halb so gross, als die zum Schenkel gehörige Höhe.

33) Zwei gleichschenklige Dreiecke sind congruent, wenn die zur Grundlinie und zu den Schenkeln gehörigen Höhen einzeln gleich sind.

34) Zwei Dreiecke sind congruent, wenn ein Winkel und die zu seinen Schenkeln gehörigen Höhen einzeln gleich sind.

35) Zwei Dreiecke sind congruent, wenn eine Seite und die zu den beiden andern gehörigen Höhen einzeln gleich sind.

36) Zwei Dreiecke sind congruent, wenn die Summe zweier Seiten und ihre Gegenwinkel einzeln gleich sind.

37) Zwei Dreiecke sind congruent, wenn die Differenz zweier Seiten und ihre Gegenwinkel einzeln gleich sind.

38) Zwei Dreiecke sind congruent, wenn eine Seite, die Summe der beiden andern und der von ihnen eingeschlossene Winkel einzeln gleich sind.

39) Zwei Dreiecke sind congruent, wenn eine Seite, die Differenz der beiden andern und der von ihnen eingeschlossene Winkel einzeln gleich sind.

40) Zwei Dreiecke sind congruent, wenn der Umfang und zwei Winkel einzeln verglichen gleich sind.

41) Zwei Vierecke sind congruent, wenn drei Seiten und die beiden zwischen denselben liegenden Winkel einzeln in ihnen gleich sind.

42) Zwei Vierecke sind congruent, wenn alle Seiten und ein beliebiger Winkel einzeln in beiden gleich sind.

43) Zwei Vierecke sind congruent, wenn drei Seiten und die beiden nicht eingeschlossenen Winkel in ihnen einzeln gleich sind, und ausserdem die Summe dieser beiden Winkel grösser ist als die Summe der beiden andern.

44) Zwei Vierecke sind congruent, wenn drei Seiten, einer von den eingeschlossenen Winkeln und sein Gegenwinkel in dem einen den entsprechenden Stücken in dem andern einzeln gleich sind, und die andern an den nicht gleichen Seiten liegenden Winkel zugleich spitze oder stumpfe sind.

45) Zwei Vierecke sind congruent, wenn drei Seiten, einer der eingeschlossenen Winkel und der mit diesen an derselben Seite liegende nicht eingeschlossene des einen Vierecks einzeln den entsprechenden Stücken des andern gleich, und ausserdem die beiden Gegenwinkel des ersteren Paares zugleich kleiner oder grösser als ein Rechter sind.

46) Zwei Vierecke sind congruent, wenn zwei Seiten und alle Winkel einander gleich sind.

47) Zwei Dreiecke sind gleichflächig, wenn zwei Seiten des einen einzeln zweien Seiten des andern gleich sind, der eingeschlossene Winkel in dem einen Dreieck aber das Supplement (zu $2R$) von dem entsprechenden Winkel des andern Dreiecks ist.

48) Zwei Dreiecke sind gleichflächig, wenn ihre Grundlinien auf derselben Geraden liegen und die Geraden, welche man von der Spitze eines jeden Dreiecks nach den Endpunkten der Grundlinie des andern zieht, einzeln unter sich parallel sind.

49) Halbirt man zwei Gegenseiten eines Vierecks (und verbindet den Halbirungspunkt einer jeden mit den Endpunkten der andern Seiten, so sind die beiden so entstandenen Dreiecke zusammen so gross als das Viereck.

50) Fällt man von einem Punkte innerhalb eines Dreiecks Lothe auf dessen Seiten, so ist die Quadratsumme von drei solchen Seitenstücken, die keinen gemeinschaftlichen Endpunkt haben, gleich der Quadratsumme der drei übrigen.

51) Beschreibt man über jeder Seite eines beliebigen Dreiecks abwärts von den beiden andern ein Quadrat, und verbindet die Endpunkte je zweier von derselben Ecke des Dreiecks auslaufender Quadratseiten, so sind die Dreiecke, welche diese Verbindenden mit den genannten Quadratseiten bilden, stets unter einander und mit dem Urdreiecke gleichflächig.

52) Wenn man die Seiten eines Dreiecks nach einerlei Richtung so verlängert, dass jede Verlängerung der verlängerten Seite gleich ist, so ist die Fläche des dadurch bestimmten Dreiecksrings das Sechsfache des Grunddreiecks.

53) Schneidet man auf jeder Seitenverlängerung das n fache der verlängerten Seite ab, so ist, wenn Δ den Inhalt des gegebenen Dreiecks bezeichnet, der Inhalt des durch die Abtragungspunkte bestimmten und um das Urdreieck verminderten Dreiecks $3n(n+1) \cdot \Delta$, wo n jede beliebige ganze oder gebrochene Zahl sein kann.

54) Werden auf den nach einerlei Richtung verlängerten Seiten eines einfachen Vierecks vom Anfangspunkte jeder Verlän-

gerung aus Stücke abgeschnitten, welche das n -fache der jedesmal verlängerten Seiten sind, so ist der Inhalt des durch die Abtragungspunkte bestimmten Vierecks, vermindert um das Urviereck (des Vierecksringes), das $2n(n+1)$ -fache des Grundvierecks. *)

Zweites Kapitel.

A u f g a b e n.

- 55) Einen rechten Winkel in drei gleiche Theile zu theilen.
- 56) Einen gestreckten Winkel in drei gleiche Theile zu theilen.
- 57) Constructionsaufgaben für Dreiecke und Vierecke geben die Congruenzsätze 22—46. Andere sind:
- 58) Ein Dreieck zu construiren aus zwei Seiten und der Halbierungslinie des eingeschlossenen Winkels.
- 59) Ein Dreieck zu construiren aus einem Winkel, dessen Halbierungslinie und der zur Gegenseite gehörigen Höhe.
- 60) Ein Dreieck zu construiren aus einer Seite, einem ihr anliegenden Winkel und der Verbindungslinie des Mittelpunkts der gegebenen Seite mit der Spitze des Gegenwinkels.
- 61) Ein Dreieck zu construiren aus einem Winkel, der von seiner Spitze nach der Mitte der Gegenseite gezogenen Transversale und der Gegenseite selbst.
- 62) Ein Dreieck zu construiren aus einer Seite, der ihr zugehörigen Höhe und der an die Mitte der Seite von der Gegenseite gezogenen Transversale.
- 63) Ein Dreieck zu construiren aus einer Höhe, der aus derselben Winkelspitze nach der Mitte der Gegenseite gezogenen Transversale und einem Winkel an jener Gegenseite.
- 64) Ein Dreieck zu construiren, wenn eine Höhe, der Unterschied der von ihr auf der Gegenseite gebildeten Abschnitte und der grössere der dieser Seite anliegenden Winkel gegeben sind.
- 65) Ein gleichschenkliges Dreieck zu construiren aus der Summe der Grundlinie und des Schenkels nebst einem seiner Winkel.
- 66) Ein gleichschenkliges Dreieck zu construiren aus der Summe seiner beiden Höhen nebst einem seiner Winkel.
- 67) Ein gleichseitiges Dreieck zu construiren aus der Summe der Seite und Höhe.

*) Die drei letzten Sätze sind der überaus werthvollen, fast lauter neue Entdeckungen im Gebiete der Geometrie enthaltenden Schrift: „Geometrische Ausläufer“ vom Schulrath Dr. Müller in Wiesbaden, Halle 1847, entnommen.

68) Ein gleichseitiges Dreieck zu construiren aus der Differenz der Seite und Höhe.

69) Ein Dreieck zu construiren, wenn eine Seite, die Summe der beiden andern und der Unterschied der Gegenwinkel dieser letzteren gegeben sind.

70) Ein Dreieck zu construiren aus einer Seite, der Differenz der beiden andern und dem Unterschiede der Gegenwinkel dieser letzteren.

71) In ein gleichseitiges Dreieck ein anderes solches zu beschreiben, dessen Seiten senkrecht auf den Seiten des ersteren stehen.

72) Den geometrischen Ort der Mittelpunkte aller Kreise zu finden, welche, mit gegebenem Radius beschrieben, eine gerade Linie berühren.

73) Den geometrischen Ort der Mittelpunkte aller Kreise zu bestimmen, welche eine gegebene gerade Linie in einem gegebenen Punkte berühren.

74) Mit gegebenem Radius einen Kreis zu beschreiben, welcher eine gegebene gerade Linie in einem gegebenen Punkte berührt.

75) Den geometrischen Ort der Mittelpunkte aller Kreise zu bestimmen, welche, mit gegebenem Radius beschrieben, einen gegebenen Kreis von Aussen berühren. (Ist dies zugleich der Ort für die von Innen berührenden Kreise?)

76) Von einem gegebenen Punkte aus, welcher innerhalb oder ausserhalb eines gegebenen Kreises liegt, einen zweiten Kreis zu beschreiben, welcher den gegebenen berührt.

77) Den geometrischen Ort der Mittelpunkte aller Kreise zu finden, welche zwei gegebene Parallelen berühren.

78) Den geometrischen Ort der Mittelpunkte aller Kreise zu finden, welche die Schenkel eines gegebenen Winkels berühren.

79) Mit gegebenem Radius einen Kreis zu beschreiben, welcher einen gegebenen andern Kreis berührt, und durch einen ausserhalb oder innerhalb desselben gegebenen Punkt geht.

80) Mit gegebenem Radius einen Kreis zu beschreiben, welcher zwei andere, ihrer Grösse und Lage nach gegebene Kreise berührt.

Anmerk. Eine vollständige Behandlung des Problems von den Berührungen s. in meiner Schrift: Die schwierigeren Aufgaben aus Jacobi's Anhängen zu van Swinden's Geometrie. Halle 1849.

von Director Dr. A. Wiegand sind im Verlage des Unterzeichneten erschienen:

- 1) **Lehrbuch der Mathematik**, umfassend:
 - a) Lehrbuch der Planimetrie. 1. Curs. 7. Aufl. 1863. 10 Sgr.
 - b) Lehrbuch der Planimetrie. 2. Curs. 5. Aufl. 1860. 10 Sgr.
 - c) Lehrbuch der ebenen Trigonometrie. 4. Aufl. 1860. 10 Sgr.
 - d) Lehrbuch der Stereometrie und sphärischen Trigonometrie. 4. Aufl. 1862. 15 Sgr.
 - e) Lehrbuch der allgem. Arithmetik. 4. Aufl. 1859. 12 $\frac{1}{2}$ Sgr.
 - f) Lehrbuch der algebr. Analysis. 3. Aufl. 1863. 15 Sgr.
 - g) Analytische Geometrie. 1854. 12 $\frac{1}{2}$ Sgr.
- 2) **Volksschulbuch der Elemente der Geometrie und deren praktische Anwendung**. Für den Bürger und Landwirth; insbes. auch für landwirthschaftl. Lehranstalten. Fortbildungs- u. Sonntagsschulen, sowie für Volksschullehrer. Mit zahlreichen Holzschnitten. 2. Aufl. 1860. 10 Sgr.
- 3) **Grundzüge der Feldmesskunde**. Ein Hülfsmittel beim Vortrage d. Geometrie auf höheren Lehranstalten z. Hinweisung auf die praktische Anwend. dieser Wissenschaft. M. Holzschn. 3. Aufl. 1860. 6 Sgr.
- 4) **Uebungsaufgaben aus der allgemeinen Arithmetik**. 1. Heft. 1853. 8 Sgr.
- 5) **Wiegand, Cornelius und Schmöger**, Grundriss der mathemat. und physikalischen Geographie sowie der christlichen Zeit- und Festrechnung. 3 Bände.
1r enthält: Grundriss der **mathematischen Geographie**. Von Dr. A. Wiegand. 5. Aufl. 1862. 10 Sgr.
2r enthält: Grundriss der **physikalischen Geographie**. Von Dr. S. Cornelius. 2. Aufl. 1856. 15 Sgr.
3r enthält: Grundriss der **christl. Zeit- und Festrechnung**. Von Prof. Dr. F. v. Schmöger. 1854. 20 Sgr.
- 6) **Lehrsätze und Aufgaben** aus Jacobi's Anhängen zu v. Swindens Elem. der Geom. 2 Bde. 1847. 1 Thlr. 24 Sgr.
- 7) **Die merkwürdigen Punkte des Dreiecks** mit Rücksicht auf harmonische Theilung. 2. Aufl. 1848. 15 Sgr.
- 8) **Der allgemeine goldene Schnitt** und sein Zusammenhang mit der harmonischen Theilung. 1849. 2 $\frac{1}{2}$ Sgr.
- 9) **Trigonaltriaden** in arithmetischer und geometrischer Progression. 1850. 4^o. 4 Sgr.
- 10) **Wie ist der mathem. Unterricht auf Realschulen fruchtbar zu machen?** 1855. 5 Sgr.
- 11) **Sind die Staats-Pensions-Kassen noch zeitgemäss?** Eine Denkschrift für Staatsbehörden und Staatsbeamte. 1859. 8 Sgr.
- 12) **Die mathematischen Grundlagen der Eisenbahn-Pensionskassen**. 1859. 1 Thlr.
- 13) **Lebensversicherungs-Katechismus**. 5. Aufl. 1863. 5 Sgr.

14) **Lebens-Versicherungs-Praxis.** 2 Thle. 2. Aufl. 1858. 12 Sgr.

15) **Aphorismen über Lebens-Versicherung.** 1862. 8 Sgr.

Vom Herrn Director Dr. Wiegand wurden aus dem Englischen übersetzt:

16) **Rutherford und Fenwick,** Sätze aus der Coordinaten-Geometrie. 1846. 6 Sgr.

17) **Rutherford,** die vollständige Lösung numerischer Gleichungen. 1849. 4^o. 15 Sgr.

Ferner erschien im Verlage des Unterzeichneten:

Mustersammlung deutscher Gedichte für Gymnasien und Real-
schulen, höhere Bürgerschulen und Privatanstalten herausgegeben
von H. L. Wolff. 8. verbess. u. verm. Auflage. Halle 1863.
350 S. 8. Gebunden 16 Sgr.

Die schnelle Einführung dieser Schrift in so vielen Lehranstalten giebt den sichersten Beweis, daß der Herausgeber das Bedürfniß der Schulen wohl erkannt hat, und verweise ich ferner auf die verschiedenen Recensionen, welche sämmtlich diese Auswahl empfehlen. Die Schulzeitung sagt u. A.: „Wer die bisher erschienenen Gedicht-Sammlungen aufmerksam durchsieht, dem kann es nicht entgehen, daß sie gewöhnlich sehr Vieles enthalten, was den Zwecken, welche solche Anthologien erreichen helfen sollen, in keiner Weise dient. Denn wenn ein derartiges Werk nicht nur den Geschmack am Schönen in den jungen Gemüthern erwecken und kräftigen, sondern auch den Schülern Anleitung zu declamatorischen Uebungen geben soll, so ist es einleuchtend, daß in den für diese Zwecke auszuwählenden Gedichten mehr das epische als das lyrische Element vorherrschen muß. Dieser Grundsatz war leitend in der vorliegenden Schrift und finden wir demnach ganz zweckmäßig Gedichte von Schiller, Uhland, Goethe, Chamisso, Rückert, Freiligrath, Grün, Mahlmann, Geibel, Heine, Senau, v. Platen, Schwab, Bedliß, v. Schenkendorf, Gellert, Lichtwer u. stark vertreten. — Jedoch hat der Herausgeber sein Augenmerk auch darauf gerichtet, möglichst von jedem unserer ausgezeichneten Dichter einige Proben aufzuführen, damit das Buch zugleich bei Vorträgen über deutsche Poesie benutzt werden kann und als vollständiger Dichterkranz auch dem gereiften Alter ein willkommener Begleiter bleibe u. s. w.“

Auswahl deutscher Gedichte zu Declamations-Uebungen für
Volks- und Bürgerschulen herausgegeben von H. L. Wolff.
Halle 1858. 2. Aufl. 160 Seiten. br. 6 Sgr. cart. 7½ Sgr.

Der Verfasser hat sich nach mehrfachen Aufforderungen veranlaßt gefunden, auch für niedere Schulen eine Sammlung von Gedichten zusammenzustellen und bietet hier auf beschränktem Raume einen für Declamationsübungen auserlesenen und zweckmäßigen Stoff. Der Preis ist so gering, daß derselbe die allgemeinste Verbreitung nicht hemmt und einer etwa beabsichtigten Einführung in Schulen u. nur entgegenkommt.

Halle. **H. W. Schmidt.**

müssen wir dem Herrn Dr. Korschel das Zeugniß geben, das er jene Schwierigkeiten in dem Maasse überwunden hat, dass wohl nicht leicht Jemand daran erinnert werden dürfte, dass er eine Uebersetzung vor sich habe. In Betreff des zweiten Punktes aber sind unsere Real-, höheren Gewerb- und polytechnischen Schulen, wie sie dermalen sind, auf einer Entwicklungsstufe angelangt, wo auch die nur mit Hülfe der Infinitesimalrechnung lösbaren Aufgaben in das Bereich des Unterrichts sehr wohl gezogen werden können. Wir müssen deshalb das Unternehmen als ein vollkommen zweckgemässes bezeichnen und zweifeln nicht, dass die gehobenen Schulen der erwähnten Art die fleissige Arbeit des Herren Uebersetzers, die sich auch durch eine äusserst geschmackvolle Ausstattung auszeichnet, mit lebhafter Freude begrüßen werden.

Blumberger, W., Grundzüge einiger **Theorieen** aus der neueren Geometrie in ihrer engeren Beziehung auf die ebene Geometrie. Mit 21 Tafeln. 1858. 1 Thlr. 26 Sgr.

Inhalt. I. Das anharmonische Verhältniss: Das Theorem von Brianchon, das Theorem von Menelaos in Bezug auf ein Dreieck, welches von einer Transversale getroffen wird, das Theorem des Ceva in Bezug auf ein Dreieck, von dessen Scheiteln drei in einem Punkte sich schneidende Geraden ausgehen, harmonische Eigenschaften des vollst. Vierecks mit Aufgaben und lineare Auflösung. Systemat. Entwicklung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten. Fundamentalsätze zu der Lehre der Homologen.

II. Theorie der Involution von Pappus, Desargues, Stewart und vielen anderen.

III. Anwendungen derselben: Das Theorem von Desargues in Bezug auf ein Kreisviereck. Das Strahlenbüschel in Involution, welches sechs Geraden bilden, Pascals mystisches Sechseck, D'Alemberts Theorem über die Aehnlichkeitspunkte dreier Kreise. Homologe Achse und Gegenachse zweier homologen Dreiecke, Aufgaben und lineare Auflösung nach Steiner, Apollonische Berührungsaufgaben etc. etc.

Briot und Bouquet's Theorie der **doppelt-periodischen** und insbesondere der **elliptischen Functionen**, mit Benutzung dahin einschlagender Arbeiten deutscher Mathematiker dargestellt von H. Fischer. Mit 37 Holzschnitten. 1862. 2 Rthlr. 20 Sgr.

Puiseux's, V., Untersuchungen über die **algebraischen Functionen**, dargestellt von H. Fischer. Mit 29 Abbild. 1861. 1 Thlr. Bildet zugleich die Vorstudien zu Briot und Bouquet's Theorie der doppelt-periodischen Functionen.

Bland, Miles, sämtliche **algebraische Gleichungen** des 1. u. 2. Grades, theils mit, theils ohne Auflösungen. Mit einem Anhang, enthaltend: Aufgaben aus der höheren Mathematik. Nach dem englisch. Original mit Benutzung von Dr. Nagels deutscher Ausgabe bearbeitet von C. G. Irl. 2 Bde. 2. Aufl. 1863. 2 Thlr.

(1. Bd. enth. Aufgaben mit Auflösungen, 1 Thlr. 15 Sgr. 2. Bd. enth. Aufgaben ohne Auflösungen. 15 Sgr.) Nach dem allgemeinen Urtheil ist dies die beste Sammlung, welche über algebraische Gleichungen existirt und bereits auf vielen Lehranstalten eingeführt.

Neumann, C., Allgemeine Lösung des Problemes über den **stationären Temperaturzustand eines homogenen Körpers**, welcher von irgend zwei nicht concentrischen Kugelflächen begrenzt wird. Mit 21 Holzschnitten und 2 Tafeln. 1862. 1 Thlr. 20 Sgr.

— — Ueber die Entwicklung einer **Function mit imaginärem Argument** nach den Kugelfunctionen erster und zweiter Art. 1862. 6 Sgr.

— — Lösung des allgemeinen Problems über den **stationären Temperaturzustand einer homogenen Kugel** ohne Hülfe von Reihenentwickelungen nebst Zusätzen zur Theorie der Anziehung. M. 1 Kpfr. 1861. 6 Sgr.

L. A. Sohncke's Sammlung von **Aufgaben** aus der **Differential- und Integralrechnung**. Zweite sehr verbesserte u. vermehrte Auflage. Herausgeg. v. Dr. H. J. Schnitzler. 2 Thle.

I. Theil: Aufgaben aus d. Differentialrechnung. Halle 1859. 1 Thlr. 6 Sgr.
II. Theil: Aufgaben aus d. Integralrechnung. Halle 1859. 26 Sgr.

Grunert's Archiv der Mathematik giebt über genanntes Werk folgendes Urtheil: Wir haben uns beeilen zu müssen geglaubt, alle Lehrer der höheren Analysis und alle Anfänger in dieser Wissenschaft, welche beabsichtigen, sich eine tüchtige Uebung im Differentiiren und Integriren zu verschaffen, auf dieses gewiss sehr nützliche und dem Unterrichte in der Analysis gewiss sehr förderliche Buch aufmerksam zu machen.

Wiegand, A., Sammlung von mehr als 300 **geometrischen Lehrsätzen und Aufgaben**, enthaltend des Herrn Professor Jacobi Anhänge zu van **Swinden's** Aufgaben der Geometrie. Mit Beweisen, Auflösungen und Zusätzen. 2 Bde. M. 26 Figurentafeln. 1847 u. 48. 8. 1 Thlr. 24 Sgr.

Leibnizen's mathemat. Schriften aus den Handschriften herausgegeben von **C. I. Gerhardt**. III. bis VII. Bd. 1855 — 63. 23 Thlr. 15 Sgr.

Inhalt: III. Bd. in 2 Hälften, enth. Briefwechsel zwischen Leibniz und Jacob, Johann und Nicolaus **Bernoulli**, 63 Bogen. gr. 8. mit 7 Taf. 1855 — 56. 8 Thlr. 15 Sgr.

IV. Bd. enth. Briefwechsel zwischen Leibniz, Wallis, Varignon, Guido Grandi, Zendrini, Hermann u. Freiherrn v. Tschirnhaus, mit 4 Kpf. 1859. 4 Thlr. 15 Sgr.

V. Bd. Die mathemat. Abhandlungen Leibnizens enthaltend. Bd. 1. m. 8 Kpf. 1858. 3 Thlr. 15 Sgr.

Dieser Band enthält 46 verschiedene, zum grossen Theil bis jetzt noch nicht gedruckte kleinere Abhandlungen. Dissertatio de arte combinatoria, de quadratura arithmetica circuli, ellipseos et hyperbolae, in 8 div. Abhandlungen, characteristica geometrica, analysis geometrica propria, calculus situs, 4 commentationes, — Analysis infinitorum, 31 commentationes. — Remarque sur la controverse entre M. de Leibniz et M. Newton etc.

VI. Bd. mathemat. Abhandlungen Leibnizens 2. Bd. (Dynamica). M. 7 Taf. 1860. 4 Thlr.

VII. Bd. Math. Abh. Leibnizens Bd. 3. Mit 4 Taf. 1863. 3 Thlr.

36 bisher noch nicht gedruckte Abhandlungen aus den Manuscripten der Königl. Bibliothek zu Hannover.

Briefwechsel zwischen Leibniz und Wolf hersg. von **C. I. Gerhardt** zugleich ein Supplement zu Leibniz math. Schriften. M. 1 Taf. 1860. 1 Thlr. 20 Sgr.

Antiquaria.

Auf unser reichhaltiges antiquarisches Lager von circ. 10000 naturhistorischer und mathematischer Schriften machen wir hiermit besonders aufmerksam.

Allgem. Naturgeschichte, Reisewerke, Zoologie c. 3000 Werke. — **Entomologie** 1000 Werke. — **Botanik** 2100 Werke. — **Mineralogie & Bergwerkswissenschaft** 1000 Werke. — **Astronomie** 600 Werke. — **Mathematik** 1200 Werke — **Physik und Chemie** 1000 Werke.

Die Verzeichnisse hiervon sind vor Kurzem erschienen und stehen Interessenten gern gratis zu Diensten.

H. W. Schmidt's Antiquariat.

Wiegand, August,

Lehrbuch der Mathematik Für den Schul- und Privatunterricht bearbeitet von
Dr. August Wiegand

Bd.: 1

Halle 1863

Math.p. 637 hl-1

urn:nbn:de:bvb:12-bsb10083095-3